Интернет-журнал «Транспортные сооружения» https://t-s.today
Russian journal of transport engineering

2019, №4, Том 6 / 2019, No 4, Vol 6 https://t-s.today/issue-4-2019.html

URL статьи: https://t-s.today/PDF/25SATS419.pdf

DOI: 10.15862/25SATS419 (http://dx.doi.org/10.15862/25SATS419)

Ссылка для цитирования этой статьи:
Буреев А.К., Овчинников И.Г. Методы «поиска форм» самонапряженных конструкций // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2019 №4, https://t-s.today/PDF/25SATS419.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/25SATS419

For citation:
Bureev A.K., Ovchinnikov I.G. (2019). Methods for "finding forms" of self-stressed structures. *Russian journal of transport engineering*, [online] 4(6). Available at: https://t-s.today/PDF/25SATS419.pdf (in Russian). DOI: 10.15862/25SATS419

УДК 624.04

Буреев Артем Константинович
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия
Аспирант
E-mail: artem.saratov2015@mail.ru

Овчинников Игорь Георгиевич
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия
Профессор
Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ
E-mail: bridgesar@mail.ru

Методы «поиска форм» самонапряженных конструкций

Аннотация. В работе рассматриваются методики поиска форм самонапряженных структур, которые могут быть задействованы в качестве конструкционной основы промышленных и транспортных сооружений, в том числе мостовых конструкций. Ввиду особого интереса к самонапряженным структурам как к перспективным вариациям вантовых сооружений, рассмотрены и проанализированы методы предварительного проектирования первоначальных форм будущих конструкций самонапряженного типа, а именно исследованы пути поиска начальных форм геометрических конфигураций на примере нескольких известных методик. Также продемонстрированы примеры практического применения самонапряженных систем в работе нескольких конструкций. Отмечены возможные вариации задействования самонапряженных структур в работе строительных конструкций, в том числе мостовых сооружений. Приведены методики поиска самонапряженных структур с учетом определенных входных и искомых параметров структуры, а именно статические и кинематические методы. Рассмотрены особенности поиска равновесной структуры тенсегрити на основании этих методов, а также их совместного применения. Также отмечены некоторые преимущества и недостатки с определенных точек зрения поиска наиболее правильной структуры тенсегрити. Рассмотрены примеры совместного применения на практике расчетов некоторых методик и их влияние друг на друга в процессе расчета. Приведены некоторые базовые примеры создания отдельных элементов самонапряженных структур с использованием схем и формул на основе геометрических и физико-математических параметров. Также кратко проанализированы рассмотренные методы с точки зрения полезности их применения.

Ключевые слова: самонапряженные структуры; тенсегрити; форма поиска; методы; конструкция; структура

Введение

Конструкции «тенсегрити» (от англ. «tension» – растяжение и «integrity» – целостность) являются уникальным примером вантовых структур как с точки зрения методов расчета, так и с точки зрения способов конструирования и строительства. Структуры тенсегрити (далее просто тенсегрити) или самонапряженные системы обладают определенным рядом уникальных свойств, среди которых особая структурная эффективность, легкость и эстетика внешнего вида. Идея самонапряженных структур нашла применение в промышленном и транспортном строительстве, где отлично проявляются их преимущества. Примеры мостов по типу тенсегрити, рассмотренные в предыдущих работах авторов, оставили хорошее впечатление об идее самонапряженных структур и ее применении в строительстве, поэтому исследование следует продолжить уже на уровне вопросов проектирования самонапряженных элементов, т. е. основы конструкции мостовых сооружений. В данной работе более подробно рассмотрим вопросы создания и проектирования самонапряженных структур на первоначальном этапе – на этапе создания равновесных конфигураций.

Тенсегрити структуры как основа конструкций мостовых сооружений

Вантовые конструкции, как в промышленно-гражданском, так и в транспортном строительстве представляют собой не только легкие и прочные высокотехнологичные структуры, но и уникальные, с точки зрения эстетического восприятия, объекты [1]. Одним из наиболее привлекательных с этих точек зрения, примером таких структур можно назвать именно тенсегрити или самонапряженные конструкции. Эти конструкции представляют собой уникальный тип вантовых систем, основанных на особенном соединении элементов за счет равномерного распределения внутренних усилий в элементах, образующих конфигурацию с бесконтактным положением жестких элементов (рис. 1). Иными словами, жесткие элементы (стойки, стержни, распорки и т. п.) находятся в равновесии благодаря взаимному натяжению тросов и вант. Более подробно идея тенсегрити и ее основы рассматривались в предыдущих работах авторов [2; 3].

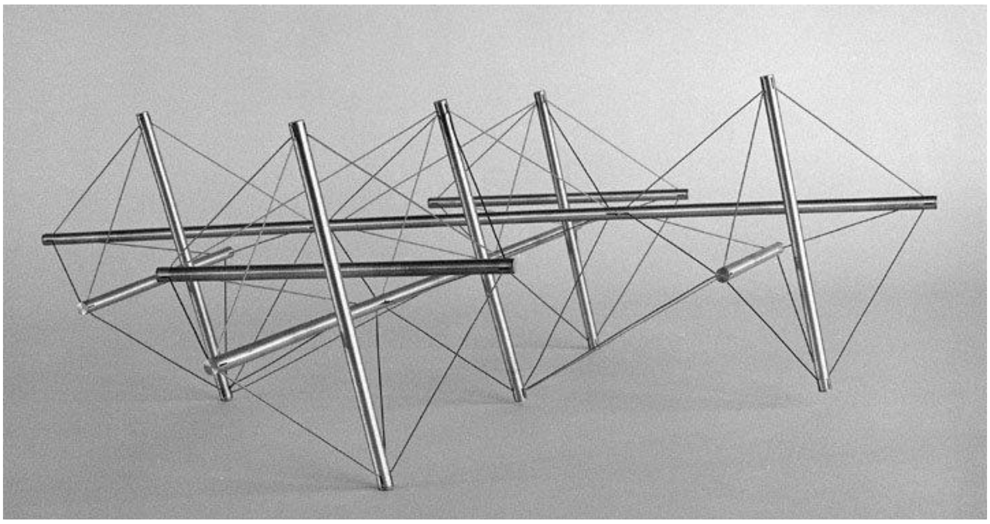

Рисунок 1. *Структура тенсегрити на примере концептуальной модели*
Figure 1. *Tensegrity Structure as an example of a conceptual model*
http://bobwb.tripod.com/snelson/marching3strutpiece1968.html

Идея самонапряженных структур имеет ряд уникальных преимуществ, позволяющих модернизировать конструкции современных пешеходных мостов:

- легкость структур (снижение собственного веса моста, экономия материалов);
- структурная и геометрическая эффективность за счет полноценной работы всех элементов системы (равномерное распределение усилий в элементах моста, уменьшение количества болевых точек в конструкции);
- компактность тенсегрити элементов (упрощение процесса транспортировки и монтажа пролетного строения);
- полезный характер нагрузок, при воздействии которых структуры становится еще жестче;
- хорошая ремонтопригодность и изменяемость (возможность корректировки конструкции путем замены или добавления вант и стоек);
- эстетически уникальный внешний вид (особо важно для пешеходных мостовых сооружений, представляющих собой элементы городской среды).

Все вышеперечисленное является хорошим основанием для более широкого внедрения структур тенсегрити в современное строительство. Остановимся на конструктивных особенностях самонапряженных структур, которые могут быть задействованы при создании мостовых конструкций. Стоит отметить, что идея тенсегрити использована пока лишь в пешеходных мостовых конструкциях ввиду специфического поведения систем тенсегрити под большими нагрузками в виде чрезмерных колебаний несущей структуры. Мосты тенсегрити основаны на применении (частичном или полном) самонапряженных элементов в качестве несущей структуры пролетного строения, пример на рис. 2 – Мост Курилпа-Бридж в Австралии (полноценная система тенсегрити) и мост-тенсегрити в Нидерландах (вспомогательная функция тенсегрити структур в виде поддерживающей системы пилонов вантового моста) [4; 5].

Рисунок 2. *Мостовые сооружения типа тенсегрити:*
Курилпа Бридж(слева) в Австралии и мост в г. Алмере (Нидерланды) (справа)
Figure 2. *Bridge structures of the tensegrity type:*
the Kurilpa bridge (left) in Australia and the bridge in Almere (Netherlands) (right)
https://www.coxarchitecture.com.au/project/kurilpa-pedestrian-bridge/;
https://arcspace.com/feature/almere-bicycle-pedestrian-bridge/

Конструкционную основу пролетных строений пешеходных мостов самонапряженного типа составляют жесткие и растяжимые элементы, а также их соединения. Работа тенсегрити структуры подразумевает сохранение такого равновесного состояния элементов и их узловых соединений, при котором структура имеет геометрическую целостность и достаточную жесткость для противодействия внешним нагрузкам и сохранения умеренных внутренних напряжений. Основой для полноценной работы тенсегрити элементов является *предварительное напряжение,* т. е. нахождение оптимальных усилий в элементах, создающих достаточную жесткость структуры. Поскольку типовых тенсегрити конструкций для пролетных строений не существует, так же, как и методических указаний для их проектирования, то будем рассматривать базовые элементы тенсегрити и способы их формирования и расчета [6].

«Поиск формы» тенсегрити конструкций

Наряду с *поиском геометрической формы,* предварительное *напряжение* является определяющим шагом, т. к. позволяет задать полезные нагрузки, благодаря которым структура становится жестче и стабильнее. Именно это является основой многих исследований в области проектирования тенсегрити систем. При этом создание предварительного напряжения тесно пересекается с поиском начальной формы и, зачастую, взаимосвязано. Поэтому процесс создания тенсегрити структур можно представить в виде алгоритма: (1) поиск формы тенсегрити; (2) статический анализ (расчет); (3) динамический анализ (расчет); (4) создание самонапряженной структуры (идея тенсегрити); (5) анализ колебаний и внешних воздействий и контроль состояния структуры. Это лишь примерный набор основных шагов в проектировании тенсегрити структур, т. к. существует достаточное количество методов с определенным алгоритмом поиска [7].

Структуры тенсегрити, как конструктивный элемент мостового сооружения, должны удовлетворять соответствующим задачам – иметь наиболее правильную конструктивную форму и достаточную жесткость для выдерживания нагрузки в виде пешеходной толпы и собственного веса. Это требует решения сложной оптимизационной задачи, включающей в себя такие параметры как: топология модуля или всей структуры тенсегрити (геометрическая конфигурация), длина, ширина, высота конструкции, размеры поперечных сечений стоек и вант, свойства материалов, предварительное напряжение, а также внешние нагрузки [8]. Самонапряженная структура, удовлетворяющая, например, геометрическим параметрам для пропуска пешеходов при условии самонапряженной конструкции модулей может быть представлена на примере правильной призмы, рис. 3.

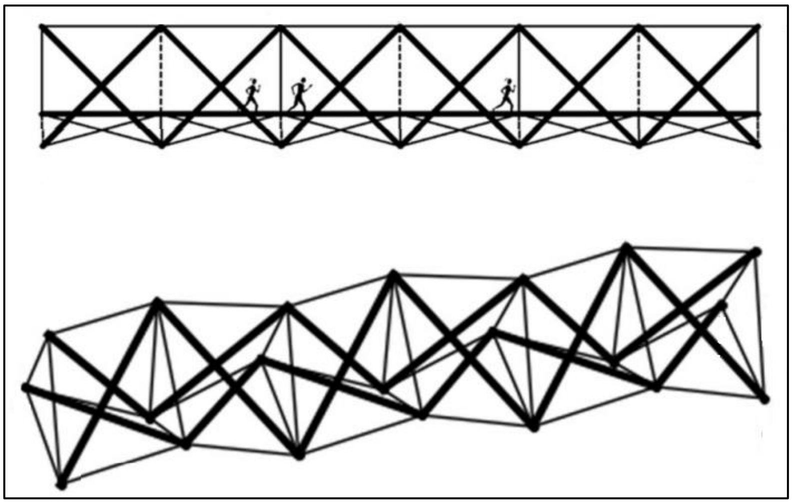

Рисунок 3. *Пример тенсегрити структуры,*
как основной несущей системы пролетного строения пешеходного моста [8]
Figure 3. *Example of a Tensegrity structure*
as the main load-bearing system of a pedestrian bridge span [8]

Остановимся более подробно на методах поиска тенсегрити структур. Процесс поиска формы рассматривается только с точки зрения нахождения равновесной структуры тенсегрити без дальнейшего расчета и без учета внешних сил и характеристик масс основных элементов конструкций.

Методы поиска форм тенсегрити подразделяются на *статические и кинематические,* и оба вида методик направлены на поиск равновесной конфигурации в состоянии самонапряжения. Кинематические методы предполагают поиск тенсегрити формы с помощью изменения геометрических параметров, а именно длин стоек и вант. Например, изменяется длина ванты при сохранении постоянной длины стойки и, наоборот, до достижения максимума или минимума длины определенных элементов. Иными словами, кинематические методы определяют равновесие системы путем максимизации длин стоек при неизменных длинах тросов, или путем минимизации длин тросов при постоянных длинах стоек. Статические методы в свою очередь в качестве основного инструмента поиска устанавливают определение усилий в элементах и их взаимосвязь с равновесием заданной изначально топологией (геометрической конфигурацией) структуры [8; 9].

На данный момент существует несколько наиболее распространенных методов поиска форм тенсегрити и их расчета, предложенных зарубежными исследователями. Их различие заключается в используемых параметрах и методах их анализа, а также в применимости к тем или иным конструктивным формам.

Из наиболее известных кинематических методов расчета стоит выделить следующие: аналитический метод, метод динамической релаксации и метод нелинейного программирования. К статическим методикам относятся: генетический алгоритм поиска формы, метод плотности силы, энергетический метод, метод сокращенных координат. Так как данное исследование тенсегрити конструкций направлено на их применение в мостостроительной сфере, постараемся на основе небольшого сравнительного анализа выделить методы поиска конструкций тенсегрити, подходящие для расчета структур, которые могут быть потенциально применимы к конструированию пролетных строений мостов. Ввиду малой изученности проблемы и многогранности этапа проектирования подобных структур все исследования носят общенаучный характер [10].

Методики поиска тенсегрити структур

Рассматриваемые методики поиска тенсегрити структуры обладают определенным набором требуемых входных параметров, таких как геометрические и физико-математические величины. При этом практически все методики требуют создания первоначальной тестовой конфигурации тенсегрити для дальнейшего анализа. Создание примерной конфигурации тенсегрити для основы будущей конструкции производится путем моделирования структуры практически (физическая модель) или программно (компьютерная модель). Также основой для дальнейшего изучения может служить простой вантовый элемент (не тенсегрити), модернизируемый в процессе поиска формы.

***Аналитический метод* или метод аналитических решений** был представлен американским ученым Робертом Коннели в 1995 году и основан на нахождении узловых координат тенсегрити структуры в зависимости от геометрических параметров, а именно максимизации (или минимизации) длин стоек и тросов, а также характеристик углов между основными элементами [7; 10].

В этом случае происходит создание предварительной структуры без обязательной необходимости предварительного натяжения, что облегчает процесс подбора нужной формы. В качестве простого примера данного метода можно привести анализ равновесной конфигурации простой фигуры, например, призмы. Как уже было сказано, призма в качестве модуля может быть задействована в работе конструкции пролетного строения моста, о чем свидетельствует концептуальная модель сооружения, представленная на рис.4.

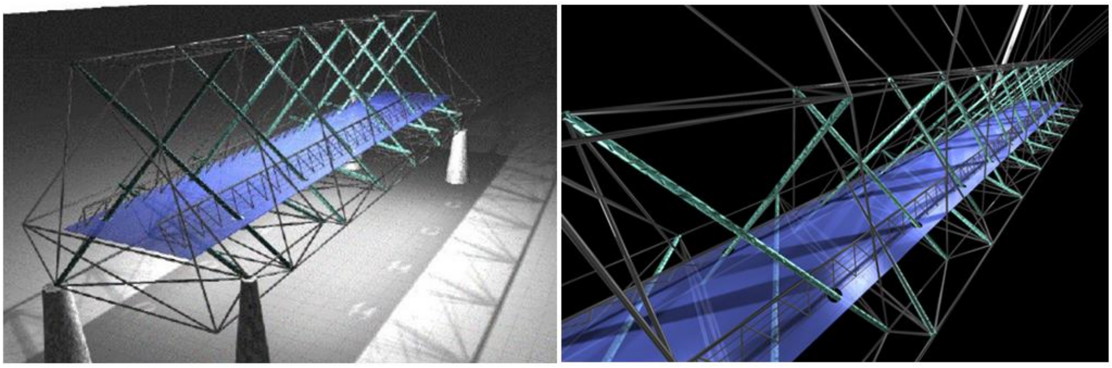

Рисунок 4. *Концептуальная модель моста на основе модульной структуры тенсегрити (в основе модуля – призма)*
Figure 4. *Conceptual model of the bridge based on the tensegrity modular structure (the module is based on the prism)*
http://happypontist.blogspot.com/2009/06/tensegrity-bridges-5-miscellaneous.html

В качестве основы поиска в данном случае используются лишь геометрические характеристики: длины стоек и вант, а также углы между ними (пример положения одной жесткой стойки призмы в трехмерном пространстве показан на рис. 5).

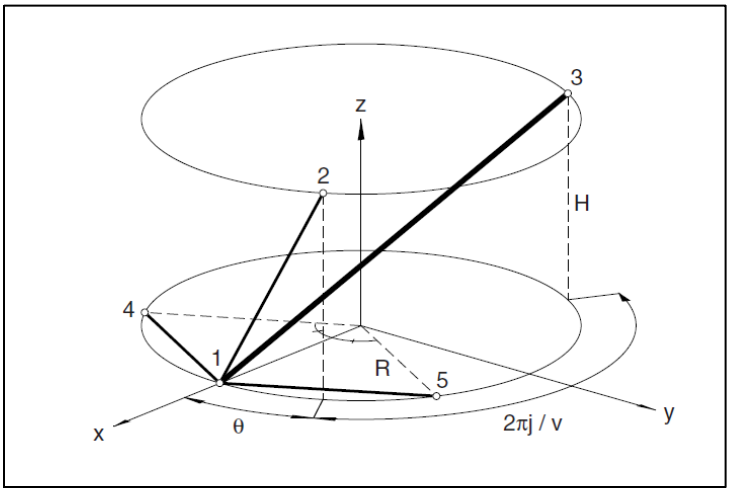

Рисунок 5. *Трехмерная схема для расчета основных элементов призмы [7]*
Figure 5. *Three dimensional diagram for calculating the main elements of the prism [7]*

На рис. 5 номерами 1, 2, 3, 4, 5 обозначены координаты концов тросов, 1 и 3 – координаты стойки (одной стойки) и узлы (точки соединения, R – радиус, j – вершина стойки, v – количество ребер, H – высота призмы. В первоначальной конфигурации боковые тросы принимают вертикальное геометрическое положение, а угол между концами стойки (радиальный угол между концом стойки в нижней плоскости и концом стойки в параллельной верхней плоскости правильной призмы или угол смещения вершины 3 относительно вершины 1, т. к. стойки призмы находятся под уклоном) равен $2\pi j/v$. Узловые координаты определяются набором координат узлов с учетом геометрических характеристик:

$$p_1 = [R, 0, 0],$$
$$p_2 = [R\cos\theta\,, R\sin\theta\,, H],$$

25SATS419
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$p_3 = \left[R\cos\left(\theta + \frac{2\pi j}{v}\right), R\sin\left(\theta + \frac{2\pi j}{v}\right), H\right],$$
$$p_4 = \left[R\cos\left(\frac{2\pi}{v}\right), -R\sin\left(\frac{2\pi}{v}\right), 0\right]$$
$$p_5 = \left[R\cos\left(\frac{2\pi}{v}\right), R\sin\left(\frac{2\pi}{v}\right), 0\right] \quad (1)$$

Данная методика задействует только инструменты аналитической геометрии, она наиболее применима для симметричных тенсегрити структур, т. к. сложные многоэлементные и несимметричные структуры требуют большего набора переменных [11].

Методика нелинейного программирования, разработанная научным сотрудником Калифорнийского технического университета Стефано Пеллегрино, подразумевает нахождение оптимальной формы тенсегрити с помощью решения задач минимизации математических параметров (функций) длин основных элементов. При заданной начальной топологии производится удлинение одной или нескольких стоек до оптимального размера. Узловые координаты представлены в трехмерном пространстве. Изменение длин происходит до нахождения окончательных геометрических характеристик, при которых сохраняется равновесие системы, т. е. сохраняется удовлетворение уравнениям ограничений. Минусом данного метода является также существенное увеличение уравнений ограничений с расширением структуры, а также недостаточная стабильность структур даже при полученном равновесном состоянии, что было установлено на основе исследования башенных конструкций тенсегрити [12].

Энергетический метод предусматривает создание равновесной конфигурации тенсегрити за счет использования матрицы напряжений (в узловых соединениях), при сохранении постоянных значений габаритных параметров стоек и вант. Матрица напряжений в данном случае аналогична матрице плотности сил (одноименный метод, также рассмотренный в работе). Метод также предложен в 1993 году американским ученым Робертом Коннелли. Этот метод пригоден также для создания развертываемых структур тенсегрити, т. е. конструкций, подразумевающих преобразование компактных (сложенных) конфигураций в полноразмерную систему (рис. 6). Развертывание в данном случае производится за счет формирования энергии в отдельных элементах системы с помощью специальных приводов. Подобные структуры могут с успехом применяться для малогабаритных пространств, а также для создания управляемых конструкций [13; 14].

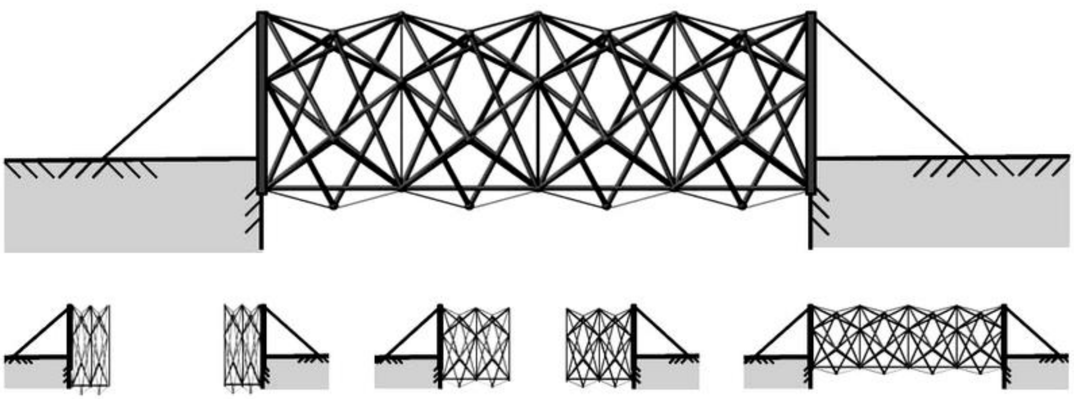

Рисунок 6. *Развертка пролета моста тенсегрити (проектный пример) задействования управляемых приводов [14]*
Figure 6. *Deployment of the tensegrity bridge span (project example) using controlled drives [14]*

Метод сокращенных (приведенных) координат был разработан профессором Политехнического университета Вирджинии (США) Корнелом Султаном в 1999 году.

25SATS419
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Тенсегрити структура в данном случае рассматривается как набор обобщенных координат узлов модулей. В процессе составления матрицы равновесия происходит сокращение набора координат с задействованием симметричных конфигураций, следовательно, применение этого метода для больших несимметричных фигур достаточно проблематично.

Достаточно новый метод ***последовательной аппроксимации***, представленный в 2006 году, предполагает нахождение множества осевых усилий в жестких и растяжимых элементах тенсегрити, а на его основе соответствующих узловых координат равновесной конфигурации. Данный метод допускает создание предварительно напряженных (самонапряженных) систем с последующей их корректировкой. Разработанный в том же году численный метод предполагает в качестве основного инструмента поиска формы использование как матриц жесткости, так и матриц напряжений. При этом внешние воздействия не учитываются. Данные методики малоприменимы для крупногабаритных динамических структур, коими являются и мостовые сооружения, в связи с излишне усложняющемся расчетом при увеличении конструкции, что затрудняет, например, процесс расширения и корректировки структур [15].

Метод динамической релаксации (ослабления) наиболее полно представлен в исследованиях профессора Университета Монпелье (Франция) Рене Мотро и подразумевает нахождение структуры тенсегрити с помощью нахождения характеристик узловых перемещений. Метод требует определения начальной структуры для последующего приложения нагрузки к основным элементам и определения смещения узловых соединений. Смещение узлов происходит до тех пор, пока остаточные усилия в элементах не достигнут нулевого значения. Такой процесс проводят для каждого узлового соединения до нахождения равновесия. Фиктивная динамическая модель тенсегрити используется для отслеживания положения конструкции с момента нагружения (натяжения) до достижения состояния статического равновесия при затухании колебаний. При использовании метода динамической релаксации для конструкций тенсегрити, элементы структуры считаются геометрически линейными, и все нагрузки считаются приложенными к узлам. Более подробно метод описан в работах [3; 16].

Метод плотности сил уже также рассматривался в наших исследованиях, поэтому в данной работе опишем этот метод при совместном применении с **генетическим алгоритмом** для поиска тенсегрити. Данный пример был рассмотрен инженерами Южнокорейского университета Седжона (Сеул). Генетический алгоритм состоит в виде специального кодирования элементов тенсегрити на основе двоичных символов. Число 1 принимается для растягивающих элементов, а число 0 – для сжимающих. Далее составляется матрица связности, генерируя процесс расположения элементов тенсегрити до достижения состояния равновесия с учетом векторов коэффициентов натяжения в элементах. Название «генетический» в данном случае основано на использовании характеристик элементов как набора хромосом, а состояние самонапряжения (равновесия) отражает удачные популяции, и соответственно, наоборот, неправильный набор узловых координат характеризуется ошибкой в генетическом наборе [17].

С помощью метода плотности сил (посредством решения линейных уравнений) находят определенный диапазон узловых координат и плотностей сил. Генетический алгоритм, в свою очередь, используют для выявления наиболее подходящего набора плотностей сил в элементах и, как следствие, соответствующего набора узловых координат, т. е. состояния равновесия тенсегрити структуры. Данный совмещенный метод позволяет не только создавать структуру с нуля, но и корректировать имеющиеся конфигурации путем редактирования набора характеристик элементов. На рис. 7 показано преобразование ячейки октаэдра посредством корректировки набора переменных координат [18; 19].

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

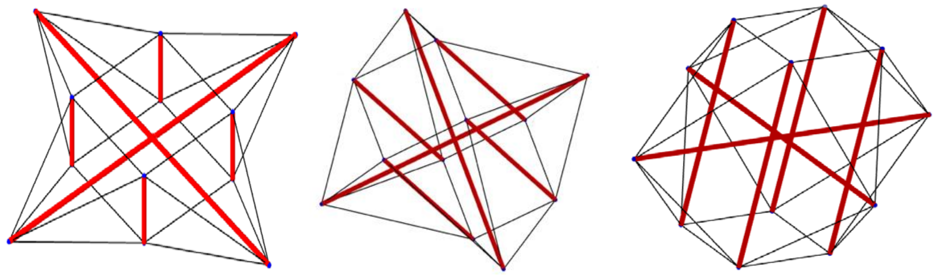

Рисунок 7. *Преобразование ячейки октаэдра (изменением длин стоек) [19]*
Figure 7. *Converting an octahedron cell (changing the length of the struts) [19]*

Конструирование базовых модулей тенсегрити в виде простейшей ячейки (комплексный метод). Помимо описания известных методик расчетов следует показать пример создания базовой основы тенсегрити структуры – модуля. Это можно сделать на примере конструирования базовых модулей тенсегрити в виде простейшей ячейки. Модуль тенсегрити – это основа любой конструкции, в том числе пролета мостового сооружения. Как уже было сказано, структуры тенсегрити могут быть реализованы в виде, например, триплексной призмы, в основе конструкции которой находятся 3 стержня и 9 тросов. Можно рассматривать более упрощенный конструктивный элемент с одним жестким стержнем, который сам по себе не будет являться самонапряженным, но в совместной комбинации с аналогичными структурами будет представлять собой целостную систему тенсегрити. Данные структуры были исследованы инженерной группой кафедры инженерной механики Пекинского Университета Цинхуа (Китай) [20]. Исследователями был продемонстрирован алгоритм определения топологии простейшей ячейки тенсегрити.

В структуре простейшей ячейки тенсегрити число жестких элементов будет соответствовать числу модулей тенсегрити. Если учесть 2 вершины в стержне (b), то выводится формула:

$$N = 2b = 2c \quad (2)$$

где b – стержень (жесткий элемент), c – элемент (ячейка) тенсегрити; N-количество узлов.

Предполагается, что в системе должно быть 4 узла в каждой ячейке. Примеры простейших элементов с 4-мя узлами продемонстрированы на рис. 8. Подобные ячейки могут быть использованы в виде основного и второстепенного модулей для сборки практически всех типов тенсегрити структур.

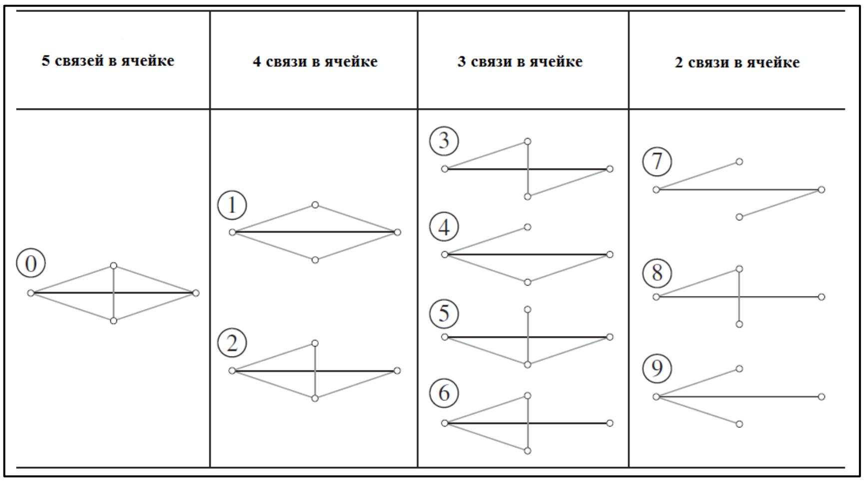

Рисунок 8. *Варианты растяжимых связей в ячейках с одним жестким элементом [20]*
Figure 8. *Options for extensible links in cells with a single rigid element [20]*

Элементарные ячейки, продемонстрированные на рисунке 8, могут быть использованы для сборки практически всех типов структур тенсегрити. Например, расширяемый восьмигранный, цилиндрический и усеченные тетраэдры типа тенсегрити представлены на рис. 9.

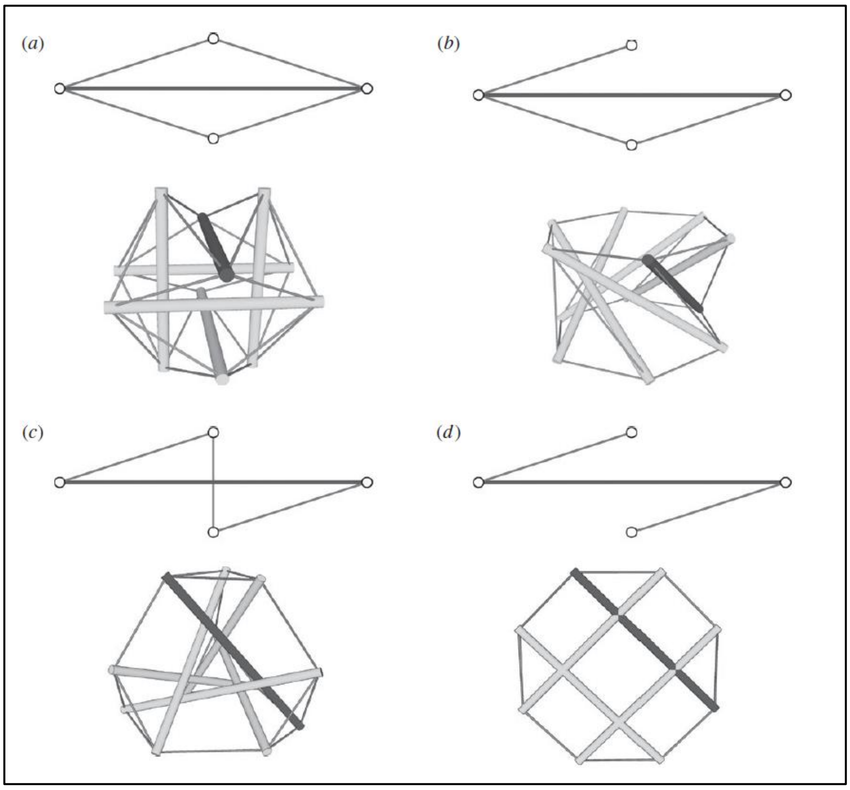

Рисунок 9. *Примеры тенсегрити структур из соответствующих элементарных ячеек (в скобках номер ячейки из рисунка 5): a – расширенный октаэдр тенсегрити (1); b – цилиндрический модуль тенсегрити (4); c – усеченный тетраэдр тенсегрити (3, в основе-Z-ячейка); d – плоскость тенсегрити (7) [20]*

Figure 9. *Examples of tensegrity structures from the corresponding elementary cells (in brackets, the cell number from figure 5): a – extended tensegrity octahedron (1); b – cylindrical tensegrity module (4); c – truncated tensegrity tetrahedron (3, based on a Z-cell); d – tensegrity plane (7) [20]*

В качестве основы модуля будем рассматривать ячейку с тремя связями, т. к. она наиболее подходит под определение тенсегрити и может быть универсальным элементом системы. Исходя из конструктивных особенностей, эта ячейка обозначена символом Z. Z-образная ячейка с 2-мя узлами и 3-мя тросами удовлетворяет условию:

$$s = \frac{ns_n}{2} \geq \frac{3}{2}c = 3c \tag{3}$$

где s – количество тросов, n – номер узла.

Конфигурацию тенсегрити ячейки типа Z можно вычислить с помощью теории графов. Например, Z-ячейка имеет количество стоек b, количество тросов 3b (3 соединения-связи) и количество узлов 2b. То есть 2 стойки определяют 4 узловых соединения, поэтому формируют 4 столбца векторов t_i (i – номер узла). Далее представлены матрицы равновесия стоек (B) и вант (S), а также матрица связности (смежности) – C, описывающая положение равновесия за счет распределения узловых точек (t – узловое число в ячейке):

$$B = [t_1\, t_4] \tag{4}$$

$$S = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} S \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \\ t_3 & t_4 \\ t_1 & t_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Теория графов в данной методике поиска позволяет проверить множество вершин (узлов) на нахождение наиболее устойчивой структуры методом итераций с помощью добавления в систему новых элементов и корректировки имеющихся. Также авторами данной методики разработан способ поиска формы, основанный на так называемом усечении многогранников (рис. 10), т. е. предполагается усечение путем обрезки определенных вершин с целью получения 3-х реберной фигуры в основе, которая, в свою очередь, может рассматриваться, как Z-ячейка, и вычисляется с помощью теории графов [21].

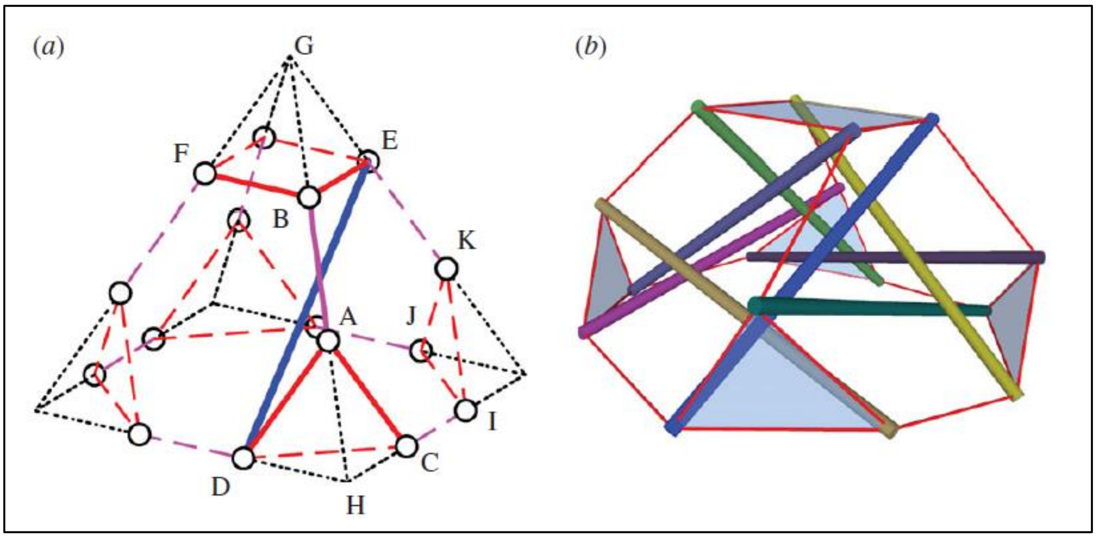

Рисунок 10. *Процесс усечения самонапряженной структуры [20]*
Figure 10. *The process of truncating a self-stressed structure [20]*

На рис. 10 показано усечение треугольника путем обрезки вершин (a – первоначальная структура, b – полученная конфигурация). Данный процесс позволил создать усовершенствованную фигуру с тремя ребрами в каждой вершине, удовлетворяющую кубическим графам. Метод усечения многогранников был предложен с целью создания более крупных и устойчивых фигур тенсегрити. Также стоит отметить, что он изначально предполагает увеличение устойчивости структуры за счет увеличения количества элементов, т. к. граней в структуре становится больше. Таким образом, авторам идеи удалось совместить математический и геометрический метод расчета ячеистых структур в виде уникальной методики поиска тенсегрити конфигураций [22].

Метод конечных элементов также применим для расчетов тенсегрити структур. МКЭ включает как свойства статических, так и кинематических методик. Согласно исследованиям группы инженеров Кембриджского университета (Великобритания), данный метод требует следующих данных для расчета: первоначальная конфигурация, значения длин растяжимых элементов (вант), характеристики предварительного напряжения (тросов и вант) и жесткости стоек (жестких элементов). Концепция поиска формы заключается в регулировке (изменении) отдельно взятых вант до приведения к минимуму потенциальной энергии системы. Метод конечных элементов служит основой для определения первоначальной формы тенсегрити. При этом стойки и ванты моделируются с помощью геометрически нелинейного 2-х узлового стержневого конечного элемента, продемонстрированного на рис. 11 [23].

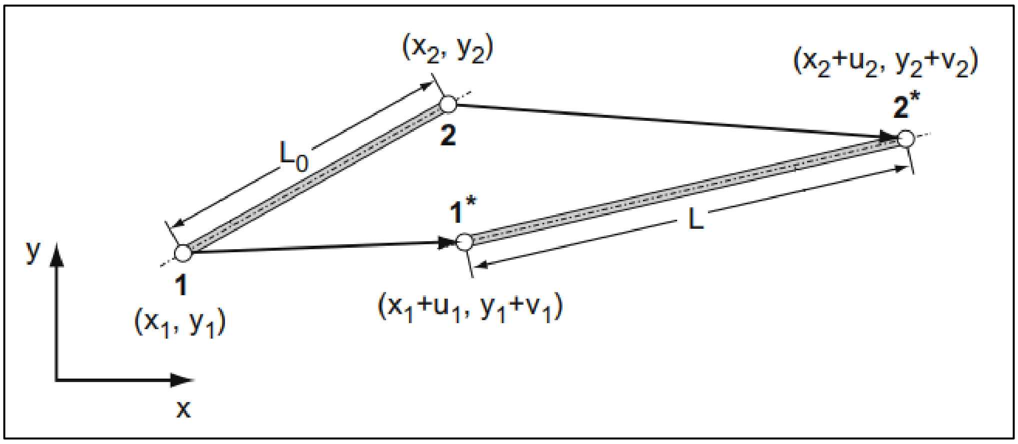

Рисунок 11. *Процесс преобразования длины стойки конечного элемента в 2-х мерном пространстве; x, y – координаты, u, v – величины изменения (перемещения) координат x и y соответственно [23]*
Figure 11. *The process of converting the length of the rack-a finite element in 2-dimensional space; x, y – coordinates, u, v – values of change (movement) of the x and y coordinates, respectively [23]*

Ключевым понятием здесь является относительная деформация, ε_E т. е. отношение абсолютной деформации (в данном случае изменения длины L) к исходной длине L_0:

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0} \tag{7}$$

Длина стойки L в свою очередь определяется через координаты концов стойки x, y, z и u, v, z – векторы перемещения соответственно:

$$L_0 = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2} \tag{8}$$

$$L = \sqrt{(x_{21} + u_{21})^2 + (y_{21} + v_{21})^2 + (z_{21} + w_{21})^2} \tag{9}$$

В дальнейшем для упрощения расчетов с корнями используется уравнение деформации Грина – Лагранжа (Eg):

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \tag{10}$$

Энергия стойки без предварительного напряжения вычисляется по формуле:

$$\Pi = EA \int_{L_0}^{L} \varepsilon_G(L)dL = EA\left(\frac{L^3 - L_0^3}{6L_0^2} - \frac{L - L_0}{2}\right) \tag{11}$$

где EA – осевая жесткость в элементах (при растяжении-сжатии), в данном случае в стойке. В начальном положении, т. е. перед заданием первоначальной формы соблюдается неравенство:

$$E^c A^c \gg E^b A^b \tag{12}$$

где $E^c A^c$ – жесткость ванты, а $E^b A^b$ – жесткость стойки. При этом полная энергия системы тенсегрити определяется по формуле:

$$\Pi = \Pi^c + \Pi^b = \sum_{i=1}^{n_c}((\frac{L_0^{c_i}}{2E^{c_i}A^{c_i}}) \nearrow 0)\, f^{c_i} + \sum_{i=1}^{n_b}\frac{L_0^{c_i}}{2E^{b_i}A^{b_i}} f^{b_i^2} \tag{13}$$

где f – усилия в элементах, i – номер узла. Вектор внутренних усилий определяется из уравнения:

$$p = \partial\Pi/\partial u \tag{14}$$

т. е. отношения изменения энергии элемента к вектору перемещения. Следовательно, матрицу жесткости (K), т. е. основу равновесной конфигурации можно получить из уравнения:

$$K = \partial p/\partial u \tag{15}$$

На рис. 12 продемонстрировано преобразование структур тенсегрити из простой трехмерной конфигурации в полноценную систему тенсегрити (штриховые линии – тросы).

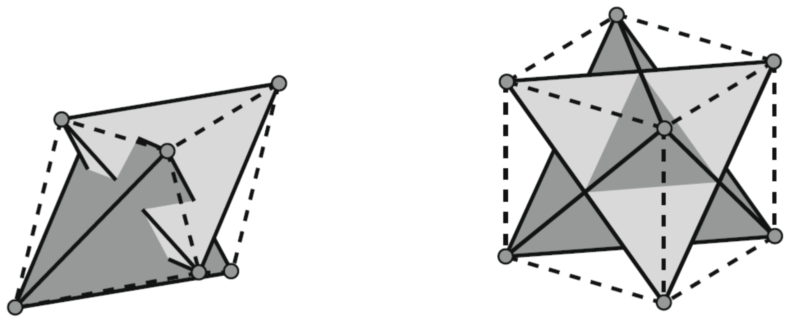

Рисунок 12. *Преобразование структуры тенсегрити [23]*
Figure 12. *Transformation of the tensegrity structure [23]*

С использованием рассмотренных формул и уравнений, можно сформулировать алгоритм расчета тенсегрити структуры:

1. Создание равновесной конфигурации с помощью упруго деформируемых стержней (стоек) и растяжимых вант на основе изменения длин данных элементов. Входные данные: примерная начальная форма, начальные длины элементов, жесткость стержней, напряжение в тросах.
2. Корректировка длин отдельных элементов до минимизации полной энергии системы. Корректировке подвергаются длины вант и стоек. Процесс продолжается до нахождения конечной жесткости стоек и нулевой жесткости ванты, до нахождения матрицы жесткости системы. Пример на рис. 8 – процесс преобразования формы тенсегрити, пунктирные линии обозначают растяжимые элементы – ванты.
3. Проводить 2 вышеописанных этапа пока величина изменения длины ванты (L0-L) не станет равной нулю.

Метод конечных элементов в системах тенсегрити дает возможность определить форму тенсегрити с учетом линейных ограничений в несколько этапов в малом пространстве. Для изначально искаженных конфигураций достаточно быстро находится равновесная конфигурация тенсегрити [24].

Заключение

На основании небольшого анализа имеющихся методик можно выделить некоторые их особенности с точки зрения применимости для конструирования полноценных тенсегрити

25SATS419
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

структур, в том числе применительно к пролетным строениям мостов. Еще раз стоит отметить, что любая конструкция тенсегрити может быть, как модульной (из отдельных элементов), так и едино собранной целостной системой. Так как расчет несущих конструкций строительных сооружений требует высокой точности, то применение рассмотренных методик полезно с точки зрения предварительных исследований о характере работы основных элементов системы. Например, методика аналитических решений не может служить инструментом для расчета комплексных структур, т. к. ограничена определенными геометрическими параметрами, но вполне может продемонстрировать простейший пример функционирования модуля тенсегрити. Метод нелинейного программирования не может гарантировать достаточной жесткости структур тенсегрити при множестве конфигураций, поэтому имеет достаточно ограниченную область применения. Метод динамической релаксации имеет ограничения для масштабных тенсегрити структур, но вполне может служить основой для определения конфигурации отдельных модулей тенсегрити. Энергетический метод позволяет учитывать динамический характер структуры тенсегрити, позволяя создавать достаточно управляемые структуры тенсегрити, что может быть полезно с точки зрения конструирования особо инновационных сооружений, в том числе развертываемых пешеходных мостов. Также отличные перспективы для более широкого применения поиска тенсегрити форм, имеет метод плотности сил, т. к. учитывает и начальные геометрические параметры, и характеристики предварительно напряжения (усилия в элементах). Данный метод отлично подходит как для создания отдельных модулей тенсегрити, так и для расширения их в полноценную комплексную структуру, например, основу пролетного строения.

В дополнение были кратко рассмотрены метод создания простейшей ячейки тенсегрити и метод конечных элементов для структур тенсегрити. Первый демонстрирует пример совокупности математических и геометрических инструментов для создания отдельных модулей тенсегрити – ячейки, и позволяет совершенствовать модули тенсегрити с целью повышения их стабильности и структурной жесткости. Метод конечных элементов, в свою очередь, позволяет создавать более сложные модульные потенциально полезные структуры тенсегрити.

Как видим, любая методика ограничивается определенным набором требуемых параметров и на выходе также имеет свои преимущества и недостатки. С учетом того, что структуры тенсегрити обладают огромной вариативностью в применении, но имеют пока недостаточную теоретическую базу для расчета, то любой из рассмотренных методов может оказаться полезным как для создания исходной модели, так и в качестве основы для расчета будущей конструкции. При этом стоит отметить комплексный подход к поиску форм тенсегрити, который может включать несколько взаимодополняющих друг друга методик, как, например, генетический алгоритм и метод плотности сил. Также помимо важности нахождения начальной формы тенсегрити, стоит учитывать возможность контроля и корректировки конструкции в процессе ее работы. В дальнейшем стоит уделить особое внимание изучению вопросов контроля функционирования сооружений тенсегрити с точки зрения надежности и с учетом внешних воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г., Инамов Р.Р., Бахтин С.А., Овчинников И.И. Висячие и вантовые мосты. Эстетические проблемы. Саратов. СГТУ. 2002. 108 с.
2. Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Буреев А.К. Применение принципа тенсегрити для создания мостовых конструкций. Часть 1. Общие сведения о системе «тенсегрити» // Транспортные сооружения, Том 4, №2 (2017) http://t-s.today/PDF/03TS217.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/03TS217.
3. Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Буреев А.К. Применение принципа тенсегрити для создания мостовых конструкций. Часть 2. Примеры мостов-тенсегрити // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», Том 4, №3 (2017) http://t-s.today/PDF/01TS317.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/01TS317.
4. Овчинников И.Г., Кокодеев А.В. Об идее самонапряженных конструкций «тенсегрити»: история, основные аспекты и перспективы использования при строительстве мостовых сооружений // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», Том 2, №3 (2015) http://t-s.today/PDF/02TS315.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
5. Кокодеев А.В., Овчинников И.Г. Анализ конструктивного решения крупнейшего моста – «тенсегрити» Курилпа Бридж // Интернет-журнал «Науковедение». 2015. Т. 7, № 4. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/40TVN415.pdf.
6. Буреев А.К., Овчинников И.Г. Методы поиска форм тенсегрити-структур // Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности: сборник материалов XVIII Международной научно-технической конференции», Тула, (29–30 июня 2017 г.). Тула: Издательство ТулГУ 2016. С. 36–41.
7. A.G. Tibert and S. Pellegrino, “Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures”, Int. J. Sp. Struct., vol. 18, no. 4, pp. 209–223, 2003.
8. Feron Jonas, Boucher Lindy, Denoël Vincent, Latteur Pierre, 2019, “Optimization of footbridges composed of prismatic tensegrity modules”, Journal of Bridge Engineering; 24 (12): 04019112 p. 1–28.
9. Marks, R. and Fuller, R.B., The Dymaxion World of Buckminster Fuller, Reinhold Publications, New York, 1960.
10. Pugh, A., An Introduction to Tensegrity, University of California Press, Berkeley, California, 1976.
11. Connelly, R. and Terrell, M., Globally rigid symmetric tensegrities, Structural Topology, 21, 1995, 59–78.
12. Pellegrino, S., Mechanics of kinematically indeterminate structures, Ph.D. dissertation, University of Cambridge, U.K., 1986.
13. Connelly, R., Rigidity and energy, Inventiones Mathematicae, 66 (1), 1982, 11–33.
14. Rhode-Barbarigos, L., Ali, N.B.H., Motro, R., & Smith, I.F. 2012. Design aspects of a deployable tensegrity-hollow-rope footbridge. International Journal of Space Structures, 27(2–3), pp. 81–95.

15. Sultan, C., Corless, M., and Skelton, R.E., Reduced prestressability conditions for tensegrity structured., Proceedings of 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 12–15 April 1999, St Louis, MO, AIAA, 1999.
16. A new approach to the analytical and numerical formfinding of tensegrity structures. Koohestani, K., & Guest, S.D. 2013. International Journal of Solids and Structures, 50(19), pp. 2995–3007.
17. Ali, N.B.H., Rhode-Barbarigos, L., Smith, I.F. 2011. Analysis of Clustered Tensegrity Structures Using a Modified Dynamic Relaxation Algorithm, International Journal of Solids and Structures, 48(5), 637–647.
18. A genetic algorithm based formfinding for tensegrity structure. Yamamoto, M., Gan, B.S., Fujita, K., & Kurokawa, J. 2011. Procedia Engineering, 14, pp. 2949–2956.
19. A Genetic Algorithm Based Form-finding of Tensegrity Structures with Multiple Self-stress States, Seunghye Lee, Jaehong Lee Articlein Journal of Asian Architecture and Building Engineering January 2017.
20. Li, Y., Feng, X.Q., Cao, Y.P., Gao, H., 2010. Constructing tensegrity structures form one-bar elementary cells. Proceedings of the Royal Society A 466, 45–61.
21. Connelly, R. & Whiteley, W. 1996 Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks. SIAM J. Discrete Math. 9, 453–491.
22. Zhang, J.Y., Guest, S.D. & Ohsaki, M. 2009 Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. Configuration and stability. Int. J. Solids Struct. 46, 1–14.
23. Finite Element Based Form-Finding Algorithm for Tensegrity Structures, Pagitz, M., Tur, J.M. 2009, International Journal of Solids and Structures, 46(17), 3235–3240.
24. Algebraic tensegrity form-finding. Masic, M., Skelton, R.E., Gill, P.E., 2005. International Journal of Solids and Structures 42, 4833–4858.

Bureev Artem Konstantinovich
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Saratov, Russia
E-mail: artem.saratov2015@mail.ru

Ovchinnikov Igor Georgievich
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
Perm national research polytechnic university, Perm, Russia
E-mail: bridgesar@mail.ru

Methods for "finding forms" of self-stressed structures

Abstract. The paper considers methods for searching for the formation of self-stressed structures that can be used as a structural basis for industrial and transport structures, including bridge structures. In view of the special interest in self-stressed structures as promising variations of cable-stayed structures, the methods of preliminary design of the initial forms of future self-stressed structures are considered and analyzed, namely, the forms of searching for the initial forms of geometric configurations are studied by the example of several well-known methods. Examples of practical application of self-stressed systems in several structures are also demonstrated. Possible variations in the use of self-stressed structures in the work of building structures, including bridge structures, are noted. Methods for searching for self-stressed structures are given, taking into account certain input and desired parameters of the structure, namely static and kinematic methods. The features of searching for an equilibrium tensegrity structure based on these methods, as well as their joint application, are considered. There are also some advantages and disadvantages from certain points of view of finding the most correct tensegrity structure. Examples of joint application of some calculation methods in practice and their influence on each other in the calculation process are considered. Some basic examples of creating individual elements of self-stressed structures using schemes and formulas based on geometric and physical-mathematical parameters are given. The considered methods are also briefly analyzed from the point of view of their usefulness.

Keywords: self-stressed structures; tensegrity; search form; methods; construction; structure

REFERENCES

1. Ovchinnikov I.G., Inamov R.R., Bakhtin S.A., Ovchinnikov I.I. (2002). Visyachie i vantovye mosty. Ehsteticheskie problemy. [*Suspension and cable-stayed bridges. Aesthetic problems*.] Saratov: Saratov State Technical University, p. 108.
2. Muravieva L.V., Ovchinnikov I.G. (2017). Definition of the subsea buried pipeline damage by the method of spectral summation of stresses under fluctuations from the technological and random seismic loads. *Russian journal of transport engineering*, [online] 2(4). Available at: http://t-s.today/PDF/03TS217.pdf (in Russian). DOI: 10.15862/03TS217.
3. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Bureev A.K. (2017). Application of a tensegrity principle for creating bridge structures. Part 2. The "tensegrity" system overview. *Russian journal of transport engineering*, [online] 3(4). Available at: http://t-s.today/PDF/01TS317 (in Russian). DOI: 10.15862/01TS317.
4. Ovchinnikov I.G., Kokodeev A.V. (2015). The paper provides an in-depth study conducted by the authors regarding potential application of "Tensegrity" concept in the bridges construction. *Russian journal of transport engineering*, [online] 3(2). Available at: http://t-s.today/PDF/02TS315.pdf (in Russian).

5. Kokodeev A.V., Ovchinnikov I.G. (2015). The analysis of constructive decisions of the largest «tensegrity» bridge – Kurilpa Bridge. *Russian journal of transport engineering*, [online] 4(7). Available at: http://naukovedenie.ru/PDF/40TVN415.pdf (in Russian).
6. Bureev A.K., Ovchinnikov I.G. (2016). Metody poiska form tensegriti-struktur. [*Methods for searching for forms of tensegrity structures*.] Tula: Publishing House Tula State University, pp. 36–41.
7. Tibert A.G., Pellegrino S. (2003). Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. *Int. J. Sp. Struct*., 4(18), pp. 209–223.
8. Feron Jonas, Boucher Lindy, Denoël Vincent, Latteur Pierre (2019). Optimization of footbridges composed of prismatic tensegrity modules. *Journal of Bridge Engineering*, 24(12), pp. 1–28.
9. Marks R., Fuller R.B. (1960). *The Dymaxion World of Buckminster Fuller*. New York: Reinhold Publications.
10. Pugh A. (1976). *An Introduction to Tensegrity*. Berkeley, California: University of California Press.
11. Connelly R., Terrell M. (1995). Globally rigid symmetric tensegrities. *Structural Topology*, 21, pp. 59–78.
12. Pellegrino S. (1986). *Mechanics of kinematically indeterminate structures*. U.K.: University of Cambridge.
13. Connelly R. (1982). Rigidity and energy. *Inventiones Mathematicae*, 66(1), pp. 11–33.
14. Rhode-Barbarigos L., Ali N.B.H., Motro R., Smith I.F. (2012). Design aspects of a deployable tensegrity-hollow-rope footbridge. *International Journal of Space Structures*, 27(2–3), pp. 81–95.
15. Sultan C., Corless M., Skelton R.E. (1999). *Reduced prestressability conditions for tensegrity structured*. St Louis, MO, AIAA.
16. Koohestani K., Guest S.D. (2013). A new approach to the analytical and numerical formfinding of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 50(19), pp. 2995–3007.
17. Ali N.B.H., Rhode-Barbarigos L., Smith I.F. (2011). Analysis of Clustered Tensegrity Structures Using a Modified Dynamic Relaxation Algorithm. *International Journal of Solids and Structures*, 48(5), pp. 637–647.
18. Yamamoto M., Gan B.S., Fujita K., Kurokawa J. (2011). A genetic algorithm based formfinding for tensegrity structure. *Procedia Engineering*, 14, pp. 2949–2956.
19. Seunghye Lee, Jaehong Lee Articlein (2017). A Genetic Algorithm Based Form-finding of Tensegrity Structures with Multiple Self-stress States. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*.
20. Li Y., Feng X.Q., Cao Y.P., Gao H. (2010). Constructing tensegrity structures form one-bar elementary cells. *Proceedings of the Royal Society A*, 466, pp. 45–61.
21. Connelly R., Whiteley W. (1996). Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks. *SIAM J. Discrete Math*., 9, pp. 453–491.
22. Zhang J.Y., Guest S.D., Ohsaki M. (2009). Symmetric prismatic te nsegrity structures: Part I. Configuration and stability. *Int. J. Solids Struct*., 46, pp. 1–14.
23. Pagitz M., Tur J.M. (2009). Finite Element Based Form-Finding Algorithm for Tensegrity Structures. *International Journal of Solids and Structures*, 46(17), pp. 3235–3240.
24. Masic M., Skelton R.E., Gill P.E., (2005). Algebraic tensegrity form-finding. *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp. 4833–4858.