

Транспортные сооружения / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2026, Том 13, № 2 / 2026, Vol. 13, Iss. 2 <https://t-s.today/issue-2-2026.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/22SATS226.pdf>

DOI: 10.15862/22SATS226 (<https://doi.org/10.15862/22SATS226>)

2.1.8. Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей (технические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Магомедов, М. М. Параметризация случайной формы обломка при оценке риска обвала для горных мостов / М. М. Магомедов, И. И. Овчинников // Транспортные сооружения. — 2026. — Т. 13. — № 2. — URL: <https://t-s.today/PDF/22SATS226.pdf>. DOI: 10.15862/22SATS226.

For citation:

Magomedov M.M., Ovchinnikov I.I. Parameterization of the random shape of debris in assessing the risk of collapse for mountain bridges. *Russian Journal of Transport Engineering*. 2026;13(2): 22SATS226. Available at: <https://t-s.today/PDF/22SATS226.pdf>. DOI: 10.15862/22SATS226. (In Russ., abstract in Eng.).

УДК 624:519.2:551.435.6

Магомедов Мухтар Магомедович

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.», Саратов, Россия
Аспирант

E-mail: magomedovmm751@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0049-3410>

Овчинников Илья Игоревич

ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия

Заведующий базовой кафедрой АО «Мостострой-11»

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», Уфа, Россия

Профессор кафедры «Автомобильные дороги, мосты и транспортные сооружения»

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.», Саратов, Россия

Профессор кафедры «Транспортное строительство»

Доктор технических наук, доцент

E-mail: bridgeart@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-297X>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=177132

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57191523104>

Параметризация случайной формы обломка при оценке риска обвала для горных мостов

Аннотация. Статья продолжает тематику исследований, посвящённых оценке долговечности горных мостов при обвальных воздействиях. В предыдущей части статьи было показано, что горная среда включает в себя воздействия в виде опасных геологических процессов, которые характеризуются случайностью различной меры. Следующим шагом в моделировании неопределённости при разработке методики расчета долговечности для горных мостов является анализ проблемы параметризации обвального воздействия горной среды.

Во второй части основное внимание уделено параметризации формы камня — ключевому, но наименее формализованному фактору, определяющему локальные повреждения опор. Предложен геометрический аппарат, основанный на введении инварианта в виде эквивалентного радиуса, среднего арифметического радиуса и дисперсии радиуса, образующих параметр остроты. Показано, что для фиксированной массы камня средний арифметический радиус всегда равен или меньше инварианта в виде эквивалентного радиуса.

Для генерации случайных форм с фиксированной массой разработан метод парного стохастического интегрирования по аналогии с транспортной задачей Канторовича. Введено условие локального баланса нормированных объёмов выступов и впадин, из которого получено аналитическое распределение относительных отклонений, сводящееся к бета-распределению. Введен параметр сопряжения в рамках парного интегрирования, который регулирует пространственную корреляцию форм камня.

На основе двухстадийной модели удара (микро удар выступа и макро удар основной поверхности) построен параметр опасности, показывающий, во сколько раз данный сценарий опаснее эталонного. Учтён эффект «отпечатка» — зависимости ответа опоры от накопленных повреждений. Полный риск выражается интегралом по континууму сценариев.

В настоящей статье авторы описывают проблемные точки параметризации обвальных нагрузок в виде самосогласованной формы объекта удара и необходимости введения в аппарат феноменологической связи.

Ключевые слова: камнепад; горный мост; форма обломка; парное стохастическое интегрирование; бета-распределение; двухстадийная модель удара; параметр опасности; риск; метод Монте-Карло; самосогласованная задача

Введение

В горной местности одним из наиболее опасных воздействий на мосты являются камнепады. Обломки горных пород, отделяясь от склонов, приобретают кинетическую энергию, достаточную для повреждения опор, пролётных строений и защитных сооружений (рис. 1). Опыт проектирования и эксплуатации горных мостов, в том числе вантовых и висячих систем, показывает, что нормативные подходы, ориентированные на детерминированные сценарии удара, часто приводят либо к неоправданному запасу прочности, либо к недооценке риска. Причина этого — в самом характере камнепада как континуума случайных сценариев, различающихся массой и формой обломков, траекторией полёта, скоростью, вращением и точкой удара.



Рисунок 1. Камнепад в Дагестане изолировал от мира 53 населенных пунктов (автор: администрация Чародинского района республики Дагестан (ссылка: <https://www.stav.kp.ru/daily/27699/5087659/>))

В последние годы выполнен ряд экспериментальных и численных исследований воздействия камнепада на опоры мостов. В [1] на модели с маятниковым шаром 56 кг изучен отклик железобетонной колонны; предложена эмпирическая формула силы удара и выявлен срезно-изгибной характер разрушения, но форма камня принималась только сферической, а случайность параметров не учитывалась. Авторы [2] разработали защитное устройство (стальная труба — пенополиуретан) для опор моста Чедыгуань; моделирование в LS-DYNA показало снижение пика силы на 30 % и рост времени нарастания нагрузки с 1 до 33 мс, однако форма камня также считалась сферической.

От предыдущих работ отличается исследование [3], где в опытах с кубическими и шаро-коническими обломками массой ~2200 кг по своду с грунтовым буфером введён коэффициент отражения k_f . Показано, что нагрузка на конструкцию может в 10–30 раз превышать силу удара о грунт, причём для кубического камня эффект значительно сильнее. В работе [4] выполнен комплексный анализ с использованием программного комплекса RocFall, метода конечных элементов LS-DYNA и методов машинного обучения. Однако форма обломка во всех сценариях принималась кубической, что не отражает естественного разнообразия форм камнепада и ограничивает применимость результатов. В [5] исследованы пустотелые опоры при ударе сферических обломков диаметром 1,5–4,0 м и скоростью 10–30 м/с; методом RSM построены зоны повреждений и показано, что два одновременных удара дают более тяжёлые повреждения, чем одиночный. Работа [6] демонстрирует ансамбль обломков как пуассоновский поток, где последовательные удары ведут к прогрессирующему разрушению свай.

Из отечественных исследователей настоящей темы наиболее весомый вклад внёс Н. М. Ройнишвили. Его аналитический метод определяет траектории камней детерминированно — по идеализированному профилю и эмпирическому коэффициенту k , — а реальный микрорельеф, форма, вращение и фрагментация явно не учитываются. В работе [7] он отмечает, что для мостовых сооружений в горных условиях может быть предопределена роль камнепропускающих сооружений, и эффективными в таком решении могут быть мосты с меньшим количеством промежуточных опор. Так вантовые и висячие мосты могут иметь большой потенциал в обеспечении безопасности горной трассы.¹ Ввиду того, что границы обвальной зоны не совсем очевидны и полоса такой зоны может простирается на несколько километров, большепролетные мосты могут лишь снизить фактор взаимодействия с опасными геологическими процессами (ОГП). Методика Н. М. Ройнишвили заложена в ОДМ 218.2.051-2015. Однако учёт одного лишь микрорельефа² показывает, что до 15 % камней преодолевают подобное сооружение, т. е. детерминизм систематически недооценивает случайность камнепада. Необходим переход к вероятностным методам, учитывающим разброс формы, массы и кинематики обломков. Авторы [8] также подчёркивают невозможность точного детерминированного прогноза и предлагают RocFall-модели, где форма либо не учитывается, либо задаётся простейшими телами. Аналогичные замечания содержат отечественные работы [9–12].

Рассмотренные работы используют верифицированные КЭ-модели, но форма обломка задаётся дискретно (шар, куб, конус), что не описывает реальный спектр форм. Нигде не решена проблема самосогласованности формы и массы, а эффект накопленных повреждений [13] и описание камнепада как неоднородного пуассоновского процесса по высоте опоры не рассматриваются.

¹ Бахтин, С. А. Висячие и вантовые мосты / С. А. Бахтин. — Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2019. — 240 с.

² Лентюков С. Н. Влияние точности построения геометрии склона на расчётные траектории движения камней, определяющие габаритные размеры улавливающих сооружений [электронный документ] / С. Н. Лентюков, И. К. Фоменко // ResearchGate. — 2025. — (www.researchgate.net/publication/391147702). Проверено 02.05.2026.

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по долговечности горных мостов и фокусируется на параметризации формы камня. Основные задачи:

- Предложить геометрический аппарат для описания произвольной формы камня с фиксированной массой.
- Сформулировать и решить проблему самосогласованности: как генерировать случайные формы с заданным $R_{эжв}$, не изменяя массу при варьировании формы.
- Получить аналитическое распределение для описания формы обломка.
- Построить двухстадийную модель удара, разделяющую микро удар выступа и макро удар основной поверхности, и на её основе сформулировать безразмерный параметр опасности D , показывающий, во сколько раз данный сценарий опаснее эталонного.
- Интерпретировать камнепад как неоднородный пуассоновский процесс по высоте опоры моста, связав интенсивность ударов $\lambda(z)$ и параметр опасности $\bar{D}(z)$ в интегральную оценку ожидаемого ущерба за время эксплуатации.

Особое внимание уделяется феноменологическим связям, калибруемым по натурным и численным данным [1–6]. Статья не претендует на «окончательную формулу», а предлагает вероятностный каркас для перехода от детерминизма к количественной оценке риска с учётом реального разнообразия форм, кинематики и последовательности ударов.

Как было показано в первой части настоящей работы [13], горная среда формирует для вантовых и висячих мостов особый класс воздействий, принципиально отличающихся от прогнозируемых нагрузок равнинных сооружений. Опасные геологические процессы — камнепады, оползни, сели — обладают тройственной случайностью: случайны время и точка приложения импульса, случайны масса и форма обломка, и, наконец, даже для фиксированного набора параметров результаты расчёта остаются случайными из-за неполноты описания формы.

Ключевой вывод первой части состоял в том, что после первого же импульсного воздействия детерминированный процесс разрушения моста превращается в случайный, а область разброса возможных исходов неограниченно расширяется с каждым последующим ударом, что ставит под сомнение достаточность нормативного принципа суперпозиции нагрузок и требует разработки вероятностного аппарата, способного учесть последовательность, форму и кинематику обвальных тел.

Проанализируем удар камня с массой $m = const$, но произвольной формы в опору моста. Скорость камня перед ударом равна v_0 , а угловая скорость ω_0 . Но что такое произвольность формы в количественной оценке?

Геометрическая параметризация формы камня в задаче (2D)

Рассмотрим камень произвольной формы в плоской задаче для упрощения аналитических операций, чтобы затем перейти к объёмной задаче. Пусть камень имеет физическую однородность во всех точках.

Контур камня проще задать в полярных координатах относительно центра масс (рис. 2):

$$R(\theta) > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (1)$$

где:

θ — полярный угол радиус-вектора, проведенного из центра эквивалентной окружности к точке на контуре обломка.



Рисунок 2. Контур обломка произвольной формы (2D) и окружность с радиусом $R_{\text{экв}}$. (составлено авторами)

Введем важный параметр $R_{\text{экв}}$ (эквивалентный радиус), который обозначает связь с инвариантом массы. В плоской задаче масса m пропорциональна площади S камня, тогда $R_{\text{экв}}$ через радиус $R(\theta)$ выразится так:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta = \pi R_{\text{экв}}^2 \Rightarrow R_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta}. \quad (2)$$

Также введем второй параметр $\bar{R}$, обозначающий математическое ожидание радиуса $R(\theta)$ и при условии равномерного распределения углов θ считающийся равным среднеарифметическому радиусу:

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Тогда дисперсия радиуса σ_R^2 , выражающая меру того, насколько радиус камня отходит от математического ожидания $\bar{R}$, будет равна осредненному квадрату второго центрального момента $[R(\theta) - \bar{R}]^2$:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R(\theta) - \bar{R}]^2 d\theta = R_{\text{экв}}^2 - \bar{R}^2, \sigma_R^2 \geq 0. \quad (4)$$

Стандарт отклонения радиуса σ_R камня, в свою очередь, являющийся относительной мерой остроты камня, позволит ввести обобщающий параметр:

$$\xi = \frac{\sigma_R}{\bar{R}} = \frac{1}{\bar{R}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R(\theta) - \bar{R}]^2 d\theta}. \quad (5)$$

Заметим в (4) соблюдение известного неравенства Коши-Буняковского-Шварца, физическая интерпретация которого имеет важное значение в контексте обсуждений настоящей темы. В общем случае неравенство определяется так:

$$\left(\int_0^{2\pi} f(\theta) g(\theta) d\theta \right)^2 \leq \left(\int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} g^2(\theta) d\theta \right), \quad (6)$$

где:

$f(\theta)$ для нашего случая представится функцией радиуса $R(\theta)$;

$g(\theta)$ представится как единичная функция для обозначения меры $\mu = g(\theta) \equiv 1$.

Тогда выражение слева неравенства (6) есть не что иное, как математическое ожидание $\bar{R}$, а справа — эквивалентный, или среднеквадратический радиус $R_{\text{экв}}$:

$$\boxed{\bar{R} \leq R_{\text{экв}}, \text{ равенство "=" только для круга}}. \quad (7)$$

В чем же заключается физическая и геометрическая интерпретация неравенства (7)? Первая заключается в том, что $\bar{R}$ выражает неинвариантность формы, а $R_{\text{экв}}$, наоборот, является отображением инварианта массы m . Тогда острые, вытянутые формы камня имеют меньший $\bar{R}$, чем близкие к кругу формы камня. С геометрической точки зрения введение инварианта массы m дает основу для создания пространства функций формы камня, имеющего норму $\|R_2\|$:

$$\|R_2\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta} = R_{\text{экв}}. \quad (8)$$

Тогда векторы полу группы $\vec{R}$ и $\vec{1}$ имеют угол α :

$$\cos \alpha = \frac{\langle R, 1 \rangle}{\|R_2\| \cdot \|1\|} = \frac{\bar{R}}{R_{\text{экв}}} \leq 1. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) параметризуют остроту произвольной формы камня с постоянной массой через скалярное произведение случайных векторов. Генерация случайных векторов $\vec{R}$, к примеру, через метод Монте-Карло даст возможность для генерирования ансамбля камней в последующих задачах расчета опор мостов на соударение с обломками случайной формы.

Также из выражения (4) можно получить следующее равенство:

$$\sigma_R^2 + \bar{R}^2 = R_{\text{экв}}^2. \quad (10)$$

Равенство (10) является зависимостью формы обломка, определенной в полярной системе координат.

Геометрическая параметризация формы в задаче (3D)

Поверхность камня зададим в сферических координатах в виде зависимости от двух переменных:

$$R(\theta, \varphi) > 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (11)$$

Тогда эквивалентный радиус вычисляется уже из условия равенства объемов аналогично площадям в задаче 2D, интегрируя дифференциальные тетраэдры $\frac{1}{3} R^3(\theta, \varphi) d\Omega$ по поверхности камня S^2 :

$$V = \frac{1}{3} \oint_{S^2} R^3(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{4}{3} \pi R_{\text{экв}}^3 \Rightarrow R_{\text{экв}} = \left[\frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} R^3(\theta, \varphi) d\Omega \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (12)$$

Математическое ожидание радиуса $R(\theta, \varphi)$ равно усредненному значению величины радиуса относительно области аргументов $\Omega = 4\pi \in S^2$:

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} R(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (13)$$

Аналогично для дисперсии радиуса находим математическое ожидание квадрата разности:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} [R(\theta, \varphi) - \bar{R}]^2 d\Omega. \quad (14)$$

Неравенство (6) также соблюдается и для функции $R(\theta, \varphi)$, определенной на двумерной поверхности $S^2: S^2 \in \mathbb{R}^3$. Равенство $\bar{R} = R_{\text{экв}}$ достигается лишь только для сферы.

Введение симплекс-пространства для описания $R(\theta, \varphi) = R_{\text{экв}}$

Неравенство устанавливает принципиальную связь: для несферического тела всегда $\bar{R} < R_{\text{экв}}$, что означает наличие как выступов $R(\theta, \varphi) > R_{\text{экв}}$, так и впадин $R(\theta, \varphi) < R_{\text{экв}}$ относительно эквивалентной сферы.

Изобразим обломок произвольной формы в плоской задаче (рис. 3):



Рисунок 3. Контур обломка произвольной формы (2D) и окружность эквивалентного радиуса (составлено авторами)

Общее количество точек пересечения и разбиение на участки в 2D-задаче определяются из уравнения:

$$(\theta_i) = R_{\text{экв}}, \quad i = 1, \dots, 2NR. \quad (15)$$

Наблюдается четное число точек (1 и 2) и чередование участков $R > R_{\text{экв}}$ (выступы) и $R < R_{\text{экв}}$ (впадины).

Доли дуг определяются пропорционально:

$$p_i = \frac{\Delta\theta_i}{2\pi}, \quad \sum_{i=1}^{2N} p_i = 1, \quad p_i \geq 0, N \geq 1. \quad (16)$$

Вектор $p = (p_1, \dots, p_{2N})$ лежит на симплексе порядка Δ^{2N-1} ввиду условия (16), а нормировка относительно постоянной угловой меры окружности замыкает многообразие форм камня, заключенных в чередующихся участках для фиксированного $R_{\text{экв}}$.

Тогда локальные площади впадин и выступов, а также условие их нормировки относительно $R_{\text{экв}}$ выражаются как:

$$I_i = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} R^2(\theta) d\theta, \quad \sum_{i=1}^{2N} I_i = 2\pi R_{\text{экв}}^2. \quad (17)$$

Теперь перейдем к изложению в объемной задаче. Камень в 3D-задаче изображен на рисунке 4.

Если уравнение: $R(\theta_i) = R_{\text{экв}}$ — задает точки пересечения, то уравнение $R(\theta, \varphi) = R_{\text{экв}}$ задает замкнутые кривые на сфере, разделяющие области $R > R_{\text{экв}}$ и $R < R_{\text{экв}}$.



Рисунок 4. Обломок произвольной формы (3D) и сфера эквивалентного радиуса (составлено авторами)

Для фиксированного числа пересечений $2N$ и долей дуг $p_i = \frac{\Delta\theta_i}{(2\pi)}$ рассмотрим эллипсы с фокусами в концах каждой дуги, у которых сумма расстояний до фокусов равна длине дуги окружности $R_{\text{ст}}\Delta\theta_i$. Здесь $R_{\text{ст}}$ — структурный радиус, задающий масштаб построения (рис. 5).

Для выступа контур должен лежать вне окружности радиуса $R_{\text{ст}}$, но внутри соответствующего эллипса; для впадины — внутри окружности и внутри эллипса. Обозначим площади этих областей как $F_i^+(p_i)$ и $F_i^-(p_i)$ соответственно. Тогда множество всех контуров с фиксированными точками пересечения имеет меру, пропорциональную произведению $\prod_i F_i^+ F_i^-$, а полная мера для $2N$ пересечений есть интеграл по симплексу при внедрении дельта-функции Дирака для условия симплекса $\sum p_i = 1$:

$$M_{2N} \propto \int_{\Delta_{2N-1}} \left[\prod_{i=1}^{2N} F_i^+(p_i) F_i^-(p_i) \right] \delta \left(\sum_{i=1}^{2N} p_i - 1 \right) \prod_{i=1}^{2N} dp_i, \quad (18)$$

Если пренебречь зависимостью $F_i^\pm$ от p_i , интеграл по симплексу даёт объём $\frac{1}{(2N-1)!}$, что соответствует гамма-функции от числа участков. Учёт конкретного вида $F_i^\pm(p_i)$ приводит к обобщённым бета-распределениям, потому что длина контура позволяет перебирать разные формы между впадинами и выступами.

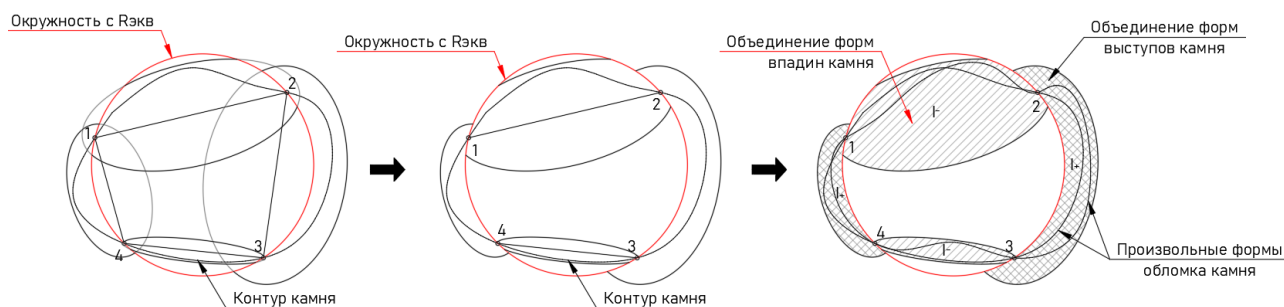


Рисунок 5. Геометрическое вычисление алгебры объединения форм камня для фиксированных θ_i (составлено авторами)

При фиксированном структурном радиусе $R_{\text{ст}}$ и фиксированных точках пересечения множество возможных контуров порождает спектр значений $R_{\text{экв}}$ — от минимального до максимального.

Это отражает неразделимость формы и массы в данной алгебре: изменение контура внутри разрешённой зоны одновременно меняет остроту и общий объём.

Если предположить симметрию между выступами и впадинами, математическое ожидание $R_{\text{ЭКВ}}$ по ансамблю всех контуров с данным $R_{\text{СТ}}$ можно считать равным самому $R_{\text{СТ}}$:

$$R_{\text{СТ}} = E[R_{\text{ЭКВ}} | R_{\text{СТ}}]. \quad (19)$$

Тогда $R_{\text{СТ}}$ интерпретируется как средний масштаб семейства, а связь с массой задаётся через $\langle m \rangle = \frac{4}{3} \pi \rho R_{\text{СТ}}^3$. Такой подход позволяет генерировать семейства камней с заданным средним размером и контролируемым разбросом масс и острот.

Предложенный геометрический приём формализует описание формы, шероховатости и массы обломков. Однако такая постановка имеет существенные сложности для параметризации обвальных нагрузок: не обеспечивается самосогласованность формы, не разделён чистый фактор формы, а описание такого не столь существенного фактора в физике удара как микрошероховатость обломка камня через аппарат симплекс-пространства выражается через бесконечномерные гамма-функции и их обобщения в виде бета-функций.

Проблема самосогласованности ансамбля форм

При генерации случайных форм с фиксированным $R_{\text{ЭКВ}}$ (или фиксированной массой) необходимо, чтобы локальные параметры удовлетворяли глобальному условию инвариантности. Не всякий контур с заданной длиной S удовлетворяет условию фиксированного $R_{\text{ЭКВ}}$.

Возникает проблема самосогласованности при попытке вычислить влияние чистой формы камня, не затрагивая параметр массы. Для генерации контура с фиксированным $R_{\text{ЭКВ}}$ необходимым условием является принадлежность заштрихованной области (рис. 5), но оно не является достаточным, поэтому площадь пересечений множеств эллипсов и круга не может служить мерой формы.

Выразим условие баланса объёмов:

$$V_+ = V_-, \quad (20)$$

где:

$$V_+ = \iiint_{R > R_{\text{ЭКВ}}} (R^3 - R_{\text{ЭКВ}}^3) d\Omega, \quad V_- = \iiint_{R < R_{\text{ЭКВ}}} (R_{\text{ЭКВ}}^3 - R^3) d\Omega. \quad (21)$$

Для упрощённого решения проблемы можно «разделить» форму камня на произвольную форму и масштабирующий коэффициент. Если $R_0(\theta)$ — произвольная положительная функция, то форма с заданным $R_{\text{ЭКВ}}$ строится так:

$$R(\theta) = R_0(\theta) \cdot \left[\frac{2\pi R_{\text{ЭКВ}}^2}{\int_0^{2\pi} R_0^2(\theta) d\theta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Подвох метода в том, что генерация произвольной формы не тождественна вычислению единичной формы. Подобные формы с произвольным $R_{\text{ЭКВ}}$ задают одномерное семейство в бесконечномерном пространстве всех форм, однако луч имеет меру ноль, что в практических задачах (даже при 5000–10 000 вариаций) даёт тождественные формы с ничтожно малой вероятностью. Попытка задать точку вместо луча в бесконечномерном пространстве форм камня — возвращает задачу самосогласованности к подбору единичной формы камня, которая аналогично возвращает к исходным условиям проблемы.

Решение этого лежит в топологии формы и теории меры, что для практических инженерных расчётов не является рациональным. Инженеру важно понимать, насколько форма камня влияет на физику удара; в практических расчётах формулу (22) проще внедрить в вариационный расчёт, например, через метод Монте-Карло.

Условие самосогласованности (22) для объёмной задачи через формулу (12):

$$R(\theta, \varphi) = R_0(\theta, \varphi) \cdot \left[\frac{4\pi R_{\text{экв}}^3}{\oint_{S^2} R_0^3(\theta, \varphi) d\Omega} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (23)$$

где:

$R(\theta, \varphi)$ — радиальная функция, описывающая контур (поверхность) обломка произвольной формы.

В предложенном методе не учтено влияние массы на форму. Это замечание не связано с недопустимостью объединения форм камня различной массы и относится к явлению увеличения окатанности камней с большей массой.

Парное стохастическое интегрирование

Предлагается новый математический подход для генерации самосогласованных форм камня, удовлетворяющих условию баланса (20). Идея базируется на аналогии с транспортной задачей, впервые сформулированной Л. В. Канторовичем [17–20].

Физический смысл метода поясним на простом примере. Необходимо сгенерировать камень фиксированной массы, но случайной формы. Такая форма всегда имеет выступы ($R > R_{\text{экв}}$) и впадины ($R < R_{\text{экв}}$). При неизменной массе избыточный объём выступов должен быть в точности скомпенсирован дефицитом объёма впадин.

Представим, что мы разбиваем поверхность камня на малые секторы и случайным образом сопоставляем каждый выступ с некоторой впадиной. При этом требуется, чтобы в каждой сопряжённой паре избыток объёма выступа точно равнялся недостатку объёма впадины. Такая процедура напоминает классическую транспортную задачу: сколько груза отправлено со склада-отправителя, столько же должно поступить на склад-получатель. Глобальный баланс соблюдается автоматически, а случайность сопряжения порождает множество вариантов транспортировки с различной экономической эффективностью [14–16].

Аналогичным образом в нашей задаче условная «транспортировка» равных объёмов между выступами и впадинами генерирует широкий спектр форм обломка — от почти сферических до остроугольных — при строгой инвариантности массы. Аппарат Канторовича-Монжа хорошо зарекомендовал себя в задачах согласования различных параметров и активно применяется в прикладных исследованиях [17–20].

Прежде чем перейти к связи с нашей задачей, кратко опишем решение исходной транспортной проблемы [17–20]. Требуется зафиксировать суммы пар $f(x) dx$ и $g(y) dy$ и при этом условии баланса минимизировать общую стоимость транспортировки (в классической постановке Канторовича-Монжа). Тогда интеграл есть инфинум суммы π -парного дифференциала $(f(x) + g(y))d\pi(x, y)$:

$$J_{\text{согл}}[f, g] = \inf_{\pi \in \Pi(\mu_f, \mu_g)} \int_{\Omega \times \Omega} (f(x) + g(y)) d\pi(x, y), \quad (24)$$

где:

$\Pi(\mu_f, \mu_g)$ — множество планов транспорта с $\mu_f(dx) = f(x)d\mu(x)$;

$\mu_g(dy) = g(y)d\mu(y)$, и дополнительным условием для почти всех точек (за исключением множества меры нуль):

$$f(x)d\mu(x) = g(y)d\mu(y). \quad (25)$$

Тогда: если $f, g \in L^1(\Omega)$ и $\int f = \int g$, то:

$$\boxed{J_{\text{согл}}[f, g] = 2 \int_{\Omega} f d\mu = 2 \int_{\Omega} g d\mu.} \quad (26)$$

В такой постановке можно задать измеримую биекцию $T: \Omega \rightarrow \Omega$, что:

$$f(x)d\mu(x) = g(T(x))d\mu(T(x)). \quad (27)$$

Интеграл может быть вычислен как:

$$J_{\text{согл}}[f, g] = \int_{\Omega} [f(x) + g(T(x))] d\mu(x). \quad (28)$$

Возвращаясь к нашей задаче, представим π -парные дифференциалы объема впадины и выступа (рис. 6). Это проще представить через нормированный относительно $R_{\text{экв}}$ радиус. Введем нормированный параметр радиуса:

$$\rho = \frac{R(\theta, \varphi)}{R_{\text{экв}}} \quad (29)$$

Из определения $R_{\text{экв}}$ следует условие нормировки формулы (12):

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} \rho^3 d\Omega = 1. \quad (30)$$

Тогда параметр остроты в новых переменных выражается так:

$$\xi^2 = \frac{\mathbb{E}[(\rho - \bar{\rho})^2]}{\bar{\rho}^2}, \quad \bar{\rho} = \mathbb{E}[\rho]. \quad (31)$$

Разобьем сферу S^2 на два множества:

$$S_+ = \{\omega \in S^2: \rho(\omega) > 1\} \quad (\text{выступы}), \quad S_- = \{\omega \in S^2: \rho(\omega) < 1\} \quad (\text{впадины})$$

Введем меры нормированных объемов выступов и впадин для пары A :

$$\mu_+(A) = \int_{A \cap S_+} (\rho^3 - 1) d\Omega, \quad \mu_-(A) = \int_{A \cap S_-} (1 - \rho^3) d\Omega. \quad (32)$$

Условие баланса (19) для нормированного радиуса выражается тогда:

$$\mu_+(S^2) = \mu_-(S^2) = V_{\text{бал}}. \quad (33)$$

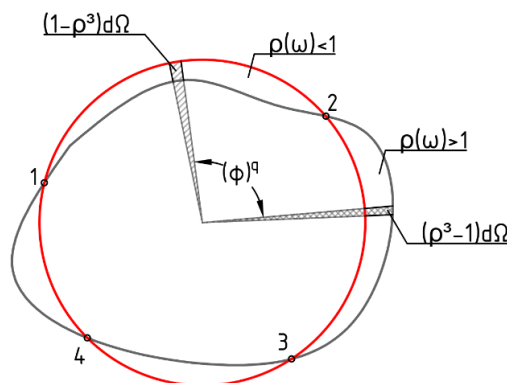


Рисунок 6. π -парный дифференциал нормированных радиусов на участках S_+ и S_- (составлено авторами)

В аппарате парного интегрирования вводится сопрягающая мера π на $S_+ \times S_-$, для которой выполняется условие локального баланса:

$$\rho_+^3 - 1 = 1 - \rho_-^3 \quad \text{для всех } \pi\text{-пар} \quad (34)$$

Это означает, что для спаренных точек (ω_+, ω_-) выполняется условие, которое можно представить как обновленную нормировку:

$$\boxed{\rho_+^3 + \rho_-^3 = 2}. \quad (35)$$

Уравнение (35) имеет простой геометрический смысл: если в паре нормированный объем выступа имеет профицит, равный $(\rho_+^3 - 1)$, то сопряжённая с ним впадина должна иметь дефицит нормированного объема $(1 - \rho_-^3)$. Иными словами, «горка» и «ямка» в паре имеют одинаковый нормированный объём. Именно это условие обеспечивает автоматическое выполнение баланса (20) для всей формы камня.

Определим новую переменную для выступа:

$$x = \frac{\rho_+^3 - 1}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (36)$$

Тогда:

$$\rho_+ = (1 + 2x)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho_- = (1 - 2x)^{\frac{1}{3}}. \quad (37)$$

Из условия локального баланса $\rho_+^3 + \rho_-^3 = 2$ следует $x = \frac{1 - \rho_-^3}{2}$, т. е. для спаренных точек выступа и впадины значения x совпадают.

Предположим, что подбор пары «выступ-впадины» происходит равномерно по телесному углу, без пространственных корреляций. Тогда совместное распределение (ρ_+, ρ_-) факторизуется так:

$$p(\rho_+, \rho_-) = p_+(\rho_+) \cdot p_-(\rho_-) \cdot \delta\left(\frac{\rho_+^3 - 1}{2} - \frac{1 - \rho_-^3}{2}\right), \quad (38)$$

где:

δ — дельта-функция Дирака, обеспечивающая выполнение условия баланса (35).

Объемный элемент на сфере в координатах (ρ, θ, ϕ) представляется через телесный угол как: $\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$.

Переходя к переменной x и учитывая якобиан преобразования аргументов $\theta, \phi \rightarrow x$ (объединяющий аргумент), получаем:

$$p(x) \propto \rho_+^2 \rho_-^2 \left| \frac{d\rho_+}{dx} \cdot \frac{d\rho_-}{dx} \right|. \quad (39)$$

Подставляя выражения из (34):

$$\rho_+^2 = (1 + 2x)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho_-^2 = (1 - 2x)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{d\rho_+}{dx} = \frac{2}{3}(1 + 2x)^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{d\rho_-}{dx} = -\frac{2}{3}(1 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \left| \frac{d\rho_+}{dx} \cdot \frac{d\rho_-}{dx} \right| = \frac{4}{9}(1 + 2x)^{-\frac{2}{3}}(1 - 2x)^{-\frac{2}{3}}. \quad (40)$$

Перемножая получаем следующую пропорцию:

$$p(x) \propto (1 + 2x)^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - 2x)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{9}(1 + 2x)^{-\frac{2}{3}}(1 - 2x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot const.$$

Таким образом, при равномерном сопряжении якобиан преобразования сократил степенные зависимости от параметра x степенные зависимости от параметра x : $p(x) = const$ на $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Это весьма важный результат: в рамках сделанных допущений, оказывается, что окатанные формы, что острые формы — все равновероятны.

В более общем случае, когда сопряжение не является полностью равномерным, можно ввести степенной весовой показатель, учитывающий, что различные участки сферы вносят разный вклад в физику того или иного явления. Обобщим выражение (38), введя параметр k , который характеризует, какой геометрической мере: объему, поверхности или длине — пропорциональна вероятность сопряжения:

$$p(x) = C \cdot \rho_+^k \rho_-^k \left| \frac{d\rho_+}{dx} \cdot \frac{d\rho_-}{dx} \right|, \quad (41)$$

где:

C — нормировочная константа, определяемая из условия $\int_0^{1/2} p(x) dx = 1$.

При $k = 2$ мы возвращаемся к равномерному распределению по объему (40). При $k = 0$ мы имеем равномерное распределение по телесному углу без учета радиального множителя. Подставляя выражения для $\rho_{\pm}$ и их производных, находим:

$$p(x) \propto (1 + 2x)^{\frac{(k-2)}{3}} (1 - 2x)^{\frac{(k-2)}{3}}. \quad (42)$$

В данной работе мы ограничимся случаем $k = 2$, что соответствует равномерному сопряжению по объему. Исследование влияния параметра k на статистические характеристики формы камня является перспективным направлением дальнейших исследований. При $k = 2$ мы получаем частный вывод о равномерном распределении точек по объему):

$$p(x) = 2, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (43)$$

Однако более содержательным является переход к переменной, связанной с относительным объемом. Если вместо x ввести величину, пропорциональную $\rho^3 - 1$, то распределение приобретает вид, сходный с бета-распределением. В общем случае, учитывая (40), можно вывести:

$$p(x) = C \cdot x^{-\frac{2}{3}} (1 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \quad (44)$$

Нормировочный интеграл:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} (1-2x)^{-\frac{2}{3}} dx. \quad (45)$$

Делаем замену $t = 2x$ ($x = \frac{t}{2}, dx = \frac{dt}{2}$):

$$I = \int_0^1 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt = 2^{-\frac{1}{3}} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

где:

$B(\alpha, \beta)$ — бета-функция. Следовательно:

$$C = \frac{I}{2^{-\frac{1}{3}} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}. \quad (46)$$

Таким образом:

$$p(x) = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \cdot x^{-\frac{2}{3}} (1-2x)^{-\frac{2}{3}}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (47)$$

Окончательно распределение (46) можно записать в виде распределения, приближенного к бета-распределению на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-2x)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)}, \quad x \in (0, 1/2) \quad (48)$$

с параметрами $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ для равномерного сопряжения: $k = 2$. Это распределение имеет интегрируемую особенность при $x \rightarrow 0$ (что соответствует почти сферической форме) и при $x \rightarrow \frac{1}{2}$ (что соответствует экстремально острой форме).

В продолжении по аналогии транспортной задачи Канторовича-Монжа предлагается ввести параметр сопряжения, который «штрафует» пару ω_+, ω_- пропорционально мере случайного угла между векторами пары ω_+, ω_- : чем больше угол, тем больше штраф для этого варианта сопряжения. Получается, при прочих равных условиях для ω_+ подбирается такое ω_- , при котором достигает минимума штрафа. Это обеспечивается благодаря введению степенного параметра q : когда $q = 0$, то не отдается предпочтение какому-то дифференциалу над другим и происходит равномерное сопряжение; когда $q \rightarrow \infty$, за выбор пары ω_+, ω_- с большим произвольным углом между векторами назначается больший штраф [17–20]:

$$c(\omega_+, \omega_-) = \|n(\omega_+) - n(\omega_-)\|^q, \quad (49)$$

где:

$q \geq 0$ — параметр;

$n(\omega)$ — единичный вектор нормали. В нашей задаче вместо ω_+, ω_- выступает π -парный дифференциал $s(\rho_+^3 - 1)d\Omega$ и $(1 - \rho_-^3)d\Omega$:

$$c(\rho_+, \rho_-) = \|n(\rho_+) - n(\rho_-)\|^q, \quad q: q \in [0; +\infty).$$

Если произвольный угол между векторами, соединяющими пару ω_+, ω_- , обозначить, как ϕ , то в общем случае получаем меру штрафа ϕ^q (рис. 6). Параметр q определяет степень пространственной корреляции выступов и впадин.

При $q = 0$ сопряжение равномерно, и форма камня не имеет преимущественной ориентации неровностей. При $q > 0$ система «штрафует» большие углы между спаренными элементами, что способствует образованию более гладких, окатанных форм. В пределе $q \rightarrow \infty$ форма стягивается к идеальной сфере (с точностью до микрошероховатости). В этом плане параметр q не просто введен как феноменологическая связь: симплекс-пространство при стягивании шероховатой фигуры к идеальному шару выражается через бесконечномерные гамма-функции микроучастков чередующихся участков впадин и выступов (рис. 7). Значит параметр q в парном интегрировании включает в себе связь с симплекс-пространством, но в значительно упрощенном виде.

Шероховатость поверхности



Рисунок 7. Микрошероховатость поверхности (ссылка: https://stroitelsport.ru/opredelenie/sheroxovatosti/poverxnosti/photo_17/)

Математически это выражается в поведении распределения $p(x)$: при $q \rightarrow \infty$ параметры бета-распределения $\alpha, \beta \rightarrow 0$, и плотность сосредотачивается вблизи $x = 0$ (почти сферическая форма), но остаётся сингулярной при $x \rightarrow 0$, что и отражает наличие микрошероховатости. В рамках настоящей работы установим феноменологическую связь между параметром q и параметрами бета-распределения α, β : при $q = 0$ мы имеем $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, а при $q \rightarrow \infty$, форма стремится к сфере.

Полученное бета-распределение (48) является аналитическим выражением для плотности вероятности относительного объема выступа (впадины) при равномерном сопряжении. Оно позволяет генерировать ансамбли случайных форм с фиксированным $R_{экр}$. Предложенный подход решает проблему самосогласованности, описанную выше: вместо попытки задать точку в бесконечномерном пространстве форм мы строим вероятностное распределение на парах «выступ-впадина», что автоматически обеспечивает выполнение условия самосогласованной задачи $V_+ = V_-$. Примеры реализации таких форм в 2D-задаче и в 3D-задаче инструментом Python приведены на рисунках 8 и 9 соответственно:

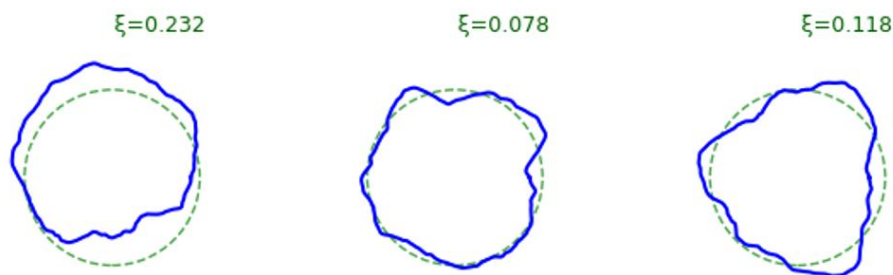


Рисунок 8. Обломки случайной формы (реализации) и их мера остроты $\xi(R)$ в 2D-задаче (составлено авторами)

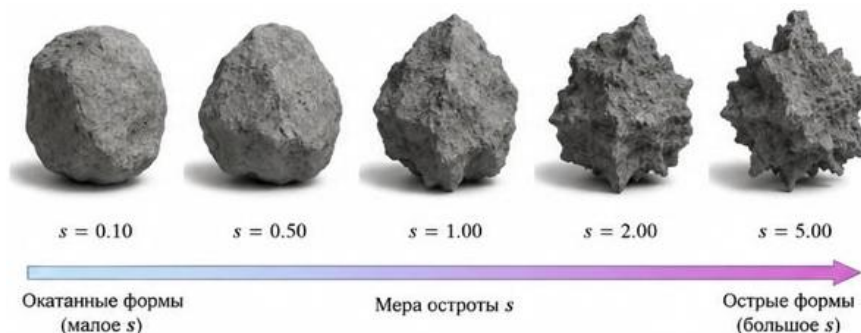


Рисунок 9. Обломки с различной мерой случайной формы в 3D-задаче. Применена натуральная визуализация (составлено авторами)

Энергетика удара. Параметр риска от камнепада.

В предыдущей части статьи [13] отмечалось, что:

- камнепад — это не детерминированное событие, а континуум возможных сценариев, различающихся точкой отрыва, траекторией, формой обломка камня, его ориентацией в момент удара;
- каждый сценарий оставляет свой «отпечаток» (локальное повреждение, остаточные деформации, трещины);
- ответ опоры моста на последующий удар зависит от этого отпечатка — повреждённая опора ведёт себя иначе, чем неповреждённая.

Насколько опасен данный сценарий камнепада по сравнению с другим? Проще пользоваться безразмерным коэффициентом, показывающим, во сколько раз один сценарий удара (с конкретной формой камня, скоростью, ориентацией, точкой контакта) опаснее эталонного. Введение понятия эталонного камнепада необходимо — это тот объем камнепада, для которого возможно произвести валидацию на реальной практике и с помощью которого калибруются феноменологические связи в предложенной методике параметризации обвальной нагрузки.

Рассмотрим два сценария камнепада, отличающихся набором параметров. Обозначим через $\mathcal{R}$ некоторую меру риска (например, вероятность превышения предельного состояния или ожидаемый ущерб). Тогда входной параметр опасности D определим как отношение рисков:

$$D = \frac{\mathcal{R}(\text{сценарий})}{\mathcal{R}(\text{эталон})}, \quad (50)$$

где эталонный сценарий соответствует удару камнем, форму и массу которого подбирают с характерными параметрами из распределения (48) со скоростью v_0^m при центральном соударении. Логика введения эталонного камня заключается в том, чтобы для единичного сценария подобрать математическое ожидание радиуса, параметр остроты, формообразующий фактор q из парного интегрирования и другие параметры, соответствующие таким же параметрам континуума возможных форм и массы обломков на неустойчивом участке горного массива.

Если принять гипотезу о степенной связи между риском и ключевыми физическими величинами (энергией, импульсом, локальным напряжением), то параметр опасности факторизуется:

$$D = \left(\frac{E_{\text{повр}}}{E_{\text{повр}}^{\text{эт}}} \right)^{\gamma_E} \cdot \left(\frac{J_{\text{лок}}}{J_{\text{лок}}^{\text{эм}}} \right)^{\gamma_J} \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{конт}}}{\sigma_{\text{конт}}^{\text{эм}}} \right)^{\gamma_\sigma} \cdot \chi \quad (51)$$

где:

$E_{\text{повр}}$ — энергия, идущая на повреждение;

$J_{\text{лок}}$ — локальный импульс;

$\sigma_{\text{конт}}$ — контактное напряжение;

χ — функция, учитывающая историю накопленных повреждений (отпечаток).

Представим двухстадийную модель удара с разделением полной энергии камня перед ударом E_0 на энергетические «каналы». Полная механическая энергия перед ударом складывается из поступательной, вращательной и потенциальной составляющих:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 + \kappa + \zeta), \quad \kappa = \frac{I \omega_0^2}{m v_0^2}, \quad \zeta = \frac{2gh}{v_0^2}, \quad (52)$$

где:

I — тензор инерции камня относительно его центра масс. В рамках данной работы ограничимся безразмерным параметром κ , обобщенно учитывающим вклад вращательного движения. Величина κ может изменяться в широких пределах в зависимости от траектории полета камня и предыстории отрыва от склона.

Стадия 1: Микро удар в виде контакта выступа, который характеризуется размером выступа $\delta \sim \sigma_R = R_{\text{экр}} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[(\rho - \bar{\rho})^2]} = R_{\text{экр}} \cdot \xi$. Энергия, диссипируемая на этой стадии:

$$E_I = \frac{1}{2} m_{\text{эф}} v_0^2 \cdot (1 + \kappa + \zeta) \cdot \left(\frac{\sigma_R}{R} \right)^{\beta_I}, \quad (53)$$

где:

$m_{\text{эф}}$ — приведённая масса камня;

β_I — эмпирический показатель для калибровки параметра остроты камня.

Стадия 2: Макро удар в виде контакта основной поверхности, который характеризуется средним радиусом $\bar{R}$. Передаваемый импульс [21] за время контакта Δt :

$$J = \int_0^{\Delta t \sim \frac{\bar{R}}{v_0}} F(t) dt = m v_0 (1 + e(\xi)) \cdot \sqrt{1 + \kappa} \cdot \cos \alpha, \quad (54)$$

где:

α — угол между направлением удара и нормалью к поверхности опоры;

e — коэффициент восстановления (реституции), зависящий от остроты камня с ведением калибровки λ :

$$e = e_0 \cdot \exp\left(-\lambda \frac{\sigma_R}{R}\right), \quad (55)$$

где:

e_0 — коэффициент восстановления для сферического тела.

Энергия, переходящая в упругие колебания опоры (глобальный отклик):

$$E_{\text{упр}} \approx \frac{J^2}{2M_{\text{eff}}}, \quad (56)$$

где:

M_{eff} — эффективная масса опоры.

Тогда полная кинетическая энергия перед ударом E_0 распределяется после удара по энергетическим «каналам»:

$$E_0 = \underbrace{E_{\text{упр}}}_{\text{упругие колебания}} + \underbrace{E_I}_{\text{локальные повреждения}} + \underbrace{E_{\text{опора}}^{\text{разр}}}_{\text{разрушение опоры}} + \underbrace{E_{\text{камень}}^{\text{разр}}}_{\text{дробление камня}}. \quad (57)$$

Для оценки риска критичны два канала:

- Локальное повреждение $E_{\text{повр}}^{\text{лок}} = \eta_I E_I$, где η_I — доля энергии, распределяемая в виде необратимой деформации материалы опоры (бетона). Эта величина определяет глубину «отпечатка».
- Глобальное повреждение (при превышении предела прочности опоры) наступает, когда максимальное контактное напряжение $\sigma_{\text{конт}}$ превышает динамическую прочность материала опоры (бетона) σ_d . Определение $\sigma_{\text{конт}}$ является темой отдельного исследования, поэтому контактное напряжение в параметре D представим в общем виде. Тогда подставляя выражения для E_I , J и $\sigma_{\text{конт}}$, получаем явную зависимость параметра опасности D от формы камня, кинематики и ориентации:

$$D = \left(\frac{\xi}{\xi_{\text{эм}}}\right)^{m_\xi} \cdot \left(\frac{v_0}{v_0^{\text{эм}}}\right)^{m_v} \cdot \left(\frac{1 + e(\xi)}{1 + e_0}\right)^{m_e} \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{конт}}}{\sigma_{\text{конт}}^{\text{эм}}}\right)^{\gamma_\sigma} \cdot (1 + \kappa)^{m_\kappa} \cdot (1 + \zeta)^{\gamma_E} \cdot \cos^{\gamma_I} \alpha \cdot \chi, \quad (58)$$

где:

χ — множитель, учитывающий историю повреждений, что опора уже повреждена предыдущими ударами. Степенные параметры (58) являются выражениями степенных параметров (51):

$$\begin{aligned} m_\xi &= \gamma_E \beta_I - 2\gamma_\sigma; \\ m_v &= 2\gamma_E + \gamma_I + \gamma_\sigma; \\ m_e &= \gamma_I + \gamma_\sigma; \\ m_R &= -2\gamma_\sigma; \\ m_\kappa &= \gamma_E + \frac{\gamma_I}{2} + \frac{\gamma_\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Возвращаясь к уравнению (58), для эталонного сценария с $\xi = 0$ получаем параметр опасности $D = (1 + \kappa)^{m_\kappa} \cdot (1 + \zeta)^{\gamma_E}$. Для острого камня с $\xi > 0$ параметр $D > 1$, показывая, во сколько раз данный удар опаснее эталонного.

Приведенные калибровочные коэффициенты после численного моделирования могут быть как определены, так и сокращены ввиду потенциальной возможности аппроксимировать результаты эксперимента.

Камнепад как неоднородный пуассоновский процесс

Склоновый неустойчивый массив — это своего рода «корзина с шариками», где шарики представлены в виде обломков, но с произвольными характеристиками: масса, форма, точка отрыва, начальная скорость и вращение. Тогда процесс реализации ударов в точке пилона на высоте z является неоднородным пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda(z)$, зависящей от высоты. В более строгой постановке камнепады вызывают каскадный эффект последовательных обрушений массива и кластеризуют потенциальные обломки следующего обвала.

Камни, оторвавшиеся выше по склону, набирают большую скорость и могут достичь большей высоты в ударе по опоре моста. Однако, существует максимальная высота $z_{\max}$, выше которой камень физически не может ударить из-за того, что часть опоры моста выше зоны досягаемости обломков (*при* $\zeta = -1$). При $z > z_{\max}$ интенсивность $\lambda(z) = 0$. Таким образом, $\lambda(z)$ — это не просто скаляр пуассоновского процесса на определенной высоте, а эпюра скаляра по высоте пилона.

Каждый удар на высоте z имеет свой параметр опасности $D(z)$, который зависит не только от высоты, но и от формы, скорости, вращения и т. д. Однако в осреднённом варианте по ансамблю генерации форм можно ввести:

$$\bar{D}(z) = \mathbb{E}_{z|z}[D(z)], \quad (60)$$

где усреднение проводится по всем возможным сценариям, которые приводят к удару именно на высоте z .

Тогда локальный скаляр риска (интенсивность «опасных ударов») на высоте z можно вычислить как:

$$r(z) = \lambda(z) \cdot \bar{D}(z). \quad (61)$$

Это произведение имеет прозрачный смысл:

- если $\lambda(z)$ велико (много ударов), но все они безопасны ($\bar{D} \approx 0$), то $r(z)$ мало;
- если $\bar{D}(z)$ велико (удары очень опасны), но удары редки ($\lambda(z)$ мало), то $r(z)$ также может быть умеренным.

Максимальный вклад в риск дают высоты, где оба множителя значимы. В этом плане эпюра риска $r(z)$ превращается в сложную нелинейную зависимость на основе стохастической модели. Условное приложение эпюры риска интенсивности камнепада на вертикальную ось опоры горного моста показана на рисунке 8:

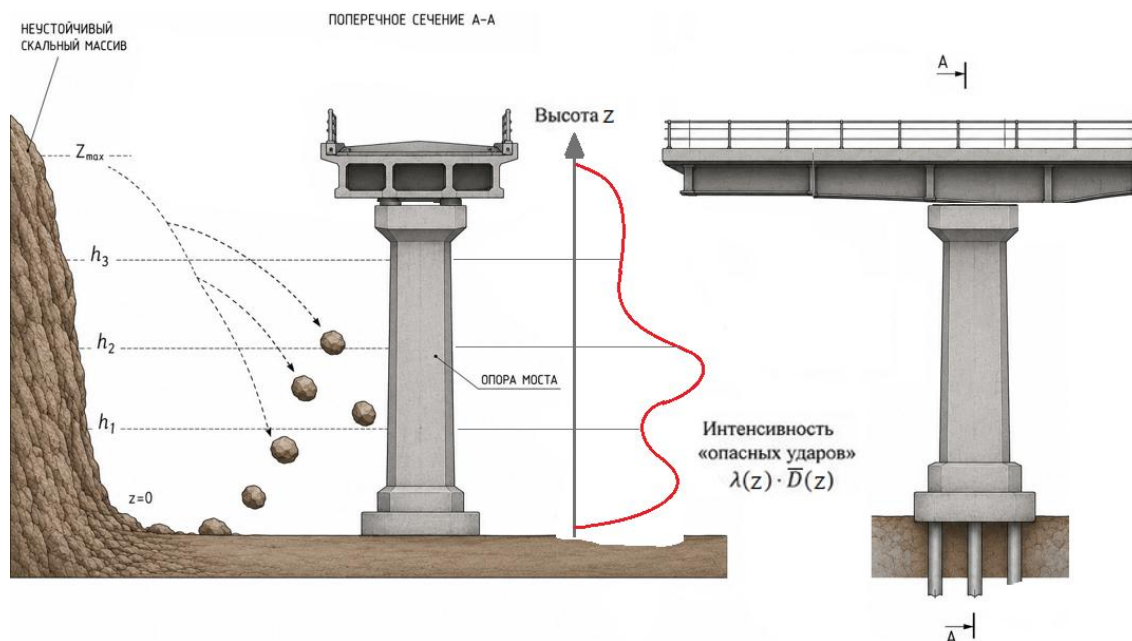


Рисунок 8. Условная эпюра интенсивности «опасных ударов»

$r(z) = \lambda(z) \cdot \bar{D}(z)$ в привязке к вертикальной оси опоры горного моста (составлено авторами)

Пусть рассматриваемый период эксплуатации моста составляет T лет. Камнепад — это неоднородный пуассоновский процесс, который с оговоркой можно представить как суперпозицию процессов на каждой высоте. Ожидаемый суммарный ущерб за время T тогда будет равным:

$$\mathbb{E}[\text{Ущерб}(T)] = \int_0^T \int_0^{z_{\max}} \mathbb{E}[\text{ущерб от 1-го удара на высоте } z] \cdot \lambda(z) dz dt. \quad (62)$$

Если считать, что ущерб от одного удара пропорционален параметру опасности D (или некоторой его степени), то:

$$\mathbb{E}[\text{Ущерб}(T)] = \int_0^T \int_0^{z_{\max}} cT \bar{D}(z) \lambda(z, T) dz dt, \quad (63)$$

где:

c — коэффициент перехода от параметра опасности к денежному или физическому ущербу (определяется из экспертных оценок или численного моделирования).

Однако, в реальности повреждения накапливаются нелинейно: первый удар ослабляет опору, второй в ту же точку может быть значительно опаснее. Это можно учесть, введя зависимость $\bar{D}(z)$ от «предыстории» — например, от суммарного параметра опасности, накопленного на данной высоте:

$$\bar{D}_i(z, t, \bar{D}_{i-1}) = \bar{D}_{i-1}(z) \cdot \left(1 + \frac{S(z, t)}{D_{\text{крит}}}\right)^{\beta_2}, \quad (64)$$

где:

$S(z, t) = \int_0^t \int_z^{z+dz} \bar{D}(z') \lambda(z') dz' dt$ — накопленное повреждение на высоте z , а выражение в скобках и есть параметр «предыстории» χ из (58).

Это превращает задачу в систему нелинейных интегральных уравнений, которая решается численно.

На практике $\bar{D}(z)$ не вычисляется аналитически, а оценивается методом Монте-Карло:

- Генерируется ансамбль форм камня по одному из вышеописанных методов: либо (23), либо через распределение (48).
- Для каждой формы генерируются случайные кинематические параметры (v_0, ω_0, α) с распределениями, зависящими от высоты удара z в постановке баллистической модели склона.
- Вычисляется D для каждого сценария, а усреднение по ансамблю даёт $\bar{D}(z)$.
- Интегрирование с $\lambda(z)$ даёт ожидаемый ущерб.

Формула (64) описывает непрерывное накопление повреждений, что достаточно для интегральной оценки риска. В более детальной постановке эволюция профиля повреждений по высоте опоры горного моста описывается марковским процессом с непрерывным временем и дискретными состояниями, управляемым интенсивностью ударов. Такой подход составляет предмет отдельного численного исследования и выходит за рамки настоящей аналитической работы

Заключение и выводы

В работе предложена многоуровневая вероятностная модель оценки риска камнепада для мостовых опор, учитывающая случайную форму обломков, их кинематику и накопление повреждений. Основные результаты:

1. Введены параметр остроты камня $\xi = \frac{\sigma_R}{R}$ и инвариант радиуса $R_{\text{экв}}$; доказано неравенство $\bar{R} \leq R_{\text{экв}}$, ограничивающее достижимые формы при фиксированной массе.
2. Для генерации случайных форм с фиксированным $R_{\text{экв}}$ разработан метод парного стохастического интегрирования (аналогия с транспортной задачей Канторовича-Монжа). Из условия локального баланса: $\rho_+^3 + \rho_-^3 = 2$ — получено выражение, сводящееся к бета-распределению $B(\alpha; \beta)$. Параметр сопряжения q регулирует пространственную корреляцию выступов и впадин.
3. Удар разделён на микро удар выступа и макро удар основной поверхности. Построен безразмерный параметр D , показывающий, во сколько раз сценарий опаснее эталонного; он факторизует вклад формы, кинематики, ориентации, масштаба и истории повреждений.
4. Камнепад описан как неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $r(z) = \lambda(z) \cdot \bar{D}(z)$, зависящей от высоты, но при этом масштабирующий параметр $\bar{D}(z)$ описывается через бета-распределение.

Модель содержит феноменологические параметры, требующие калибровки. Предложенная методология предоставляет инженеру гибкий вероятностный каркас для перехода от детерминированных расчётов к количественной оценке риска с учётом реального разнообразия форм, кинематики и последовательности ударов, что позволяет обоснованно назначать защитные мероприятия и сроки службы горных мостов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Experimental study on the damage of bridge pier under the impact of rockfall / S. XinPo, B. Yuzhang, Z. RuoYun [et al.] // *Advances in Civil Engineering*. — 2021. — С. 1–18. — DOI: [10.1155/2021/6610652](https://doi.org/10.1155/2021/6610652). — EDN: [WARSAT](https://www.edn.net/WARSAT). (дата обращения: 12.04.2026).
2. He S. Impact protection of bridge piers against rockfall / S. He, Sh. Yan, Y. Deng, W. Liu // *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. — 2018. — Т. 78, № 10. — С. 1–11. — DOI: [10.1007/s10064-018-1250-5](https://doi.org/10.1007/s10064-018-1250-5). — EDN: [NACJWZ](https://www.edn.net/NACJWZ). (дата обращения: 12.04.2026).
3. Wang Y. Research on the calculation method of falling rock impact load / Y. Wang, S. Tian, J. Yang [et al.] // *Journal of Southwest Jiaotong University*. — 2026. — Т. 61, № 1. — С. 21–30. — DOI: [10.3969/j.issn.0258-2724.2024091](https://doi.org/10.3969/j.issn.0258-2724.2024091). (дата обращения: 12.04.2026).
4. Risk Assessment and Prevention for Typical Railway Bridge Pier under Rockfall Impact / C. Zhiyang, L. Zhanhui, X. Guoji [et al.] // *Structures*. — 2024. — Т. 62. — DOI: [10.1016/j.istruc.2024.106178](https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106178). — EDN: [LAQATI](https://www.edn.net/LAQATI). (дата обращения: 12.04.2026).
5. Li F. Durability assessment method of hollow thin-walled bridge piers under rockfall impact based on damage response surface / F. Li, Y. Liu, J. Yang // *Sustainability*. — 2022. — Т. 14, № 19. — DOI: [10.3390/su141912196](https://doi.org/10.3390/su141912196). — EDN: [PPIXNF](https://www.edn.net/PPIXNF). (дата обращения: 12.04.2026).
6. DEM Simulation of the Bridge Collapse under the Impact of Rock Avalanche: A Case Study of the 2020 Yaoheba Rock Avalanche in Southwest China / B. Li, W. Gong, H. Tang, L. Wang // *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. — 2024. — Т. 83, № 3. — С. 1–17. — DOI: [10.1007/s10064-024-03604-1](https://doi.org/10.1007/s10064-024-03604-1). — EDN: [LVXFME](https://www.edn.net/LVXFME). (дата обращения: 12.04.2026).
7. Ройнишвили Н. М. Защита железнодорожного пути от горных обвалов и осыпей / Н. М. Ройнишвили. — Москва: Транспорт, 1973. — 308 с. (дата обращения: 12.04.2026).
8. Фоменко И. К. Математическое моделирование и оценка рисков камнепадов в программном комплексе RocFall для разработки мероприятий по инженерной защите / И. К. Фоменко, Д. Н. Горбцов, М. А. Новгородова, О. Н. Сироткина // *Инженерная геология и геоэкология: фундаментальные и прикладные проблемы*. — 2022. — С. 34–39. — DOI: [10.25296/978-5-6047951-0-1-2022-3-1-165](https://doi.org/10.25296/978-5-6047951-0-1-2022-3-1-165). — EDN: [XORJNY](https://www.edn.net/XORJNY). (дата обращения: 12.04.2026).
9. Ванеев С. Д. Защита автомобильных дорог в горных условиях / С. Д. Ванеев, М. Э. Дзапаров, С. Т. Дзугаев // *Современные научно-технические и социально-гуманитарные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник докладов II Всероссийской научно-практической конференции*. — Владикавказ, 2021. — С. 57–61. — EDN: [CGQMOE](https://www.edn.net/CGQMOE). (дата обращения: 12.04.2026).
10. Шеина Т. В. Технологии защиты автодорог от камнепадов / Т. В. Шеина, Е. А. Авдеева // *Градостроительство и архитектура*. — 2018. — Т. 8, № 1(30). — С. 28–34. — DOI: [10.17673/Vestnik.2018.01.5](https://doi.org/10.17673/Vestnik.2018.01.5). — EDN: [UUUEEQ](https://www.edn.net/UUUEEQ). (дата обращения: 12.04.2026).
11. Белов О. Д. Зависимость кинетической энергии, максимальной высоты отскока, горизонтального перемещения и скорости обломка камнепада от его формы / О. Д. Белов // *Труды РАНМИ*. — 2024. — № 3-1(41). — С. 246–267. — DOI: [10.24412/2519-2418-2024-341-246-267](https://doi.org/10.24412/2519-2418-2024-341-246-267). — EDN: [JRLFRE](https://www.edn.net/JRLFRE). (дата обращения: 12.04.2026).

12. Каюмова А. Н. Прогноз последствий камнепада в карьерах / А. Н. Каюмова // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2004. — № 9. — С. 257–261. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prognoz-posledstviy-kamnepada-v-karierah>. — EDN: [IFAQFF](#). (дата обращения: 12.04.2026).
13. Магомедов М. М. Стихийные воздействия горной среды на мосты. Часть 1. Отражение в отечественных нормативных документах / М. М. Магомедов, И. И. Овчинников // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. — 2025. — № 4. — С. 22–37. — DOI: [10.15593/24111678/2025.04.02](https://doi.org/10.15593/24111678/2025.04.02). — EDN: [UMJTZD](#). (дата обращения: 12.04.2026).
14. Канторович Л. В. О перемещении масс / Л. В. Канторович // Доклады АН СССР. — 1942. — Т. 37, № 7-8. — С. 227–230. — DOI: [10.1007/s10958-006-0049-2](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0049-2). — EDN: [ZJIAQB](#). (дата обращения: 12.04.2026).
15. Букин Д. Б. О задаче Канторовича для нелинейных образов меры Винера / Д. Б. Букин // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 5. — С. 682–688. — DOI: [10.4213/mzm11152](https://doi.org/10.4213/mzm11152). — EDN: [XAMYIH](#). (дата обращения: 12.04.2026).
16. Богачев В. И. Задача Канторовича оптимальной транспортировки мер: новые направления исследований / В. И. Богачев // Успехи математических наук. — 2022. — Т. 77, № 5(467). — С. 3–52. — DOI: [10.4213/rm10066](https://doi.org/10.4213/rm10066). — EDN: [PDXGQE](#). (дата обращения: 12.04.2026).
17. Bouchitté G. Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation / G. Bouchitté, G. Buttazzo // Journal of the European Mathematical Society. — 2001. — Т. 3, № 2. — С. 139–168. — DOI: [10.1007/s100970000027](https://doi.org/10.1007/s100970000027). — EDN: [ATKWAD](#). (дата обращения: 12.04.2026).
18. Engquist B. Application of the Wasserstein metric to seismic signals / B. Engquist, B. D. Froese // Communications in Mathematical Sciences. — 2014. — Т. 12, № 5. — С. 979–988. — DOI: [10.4310/CMS.2014.v12.n5.a7](https://doi.org/10.4310/CMS.2014.v12.n5.a7). — EDN: [YVTSCP](#). (дата обращения: 12.04.2026).
19. Bourne D.P. A Wasserstein approach to random close packing of hard spheres / D.P. Bourne, P.J.J. Kok, S.M. Roper, T.D.T. Spanjer // Journal of Computational Physics. — 2023. — Т. 482. — Art. 112055. — DOI: [10.1016/j.jcp.2023.112055](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112055). (дата обращения: 12.04.2026).
20. Chartrand R. A gradient descent solution to the Monge-Kantorovich problem with applications to image segmentation and crack detection / R. Chartrand, B. Wohlberg, E. M. Bollt // IEEE Transactions on Image Processing. — 2005. — Т. 14, № 10. — С. 1564–1575. — DOI: [10.1109/TIP.2005.852206](https://doi.org/10.1109/TIP.2005.852206). (дата обращения: 12.04.2026).
21. Zhang G. Characteristic parameters theoretical analysis of rockfall impact on ground / G. Zhang, H. Tang, X. Xiang // Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering. — 2012. — Т. 31, supp. 1. — С. 2839–2848. — DOI: [10.3969/j.issn.1000-6915.2012.z1.017](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-6915.2012.z1.017). (дата обращения: 12.04.2026).

Magomedov Mukhtar Magomedovich

Saratov State Technical University named after Y. Gagarin, Saratov, Russia
E-mail: magomedovmm751@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0049-3410>

Ovchinnikov Ilya Igorevich

Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia
Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia
Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russia
E-mail: bridgeart@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-297X>
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=177132
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57191523104>

Parameterization of the random shape of debris in assessing the risk of collapse for mountain bridges

Abstract. The article continues the research topic devoted to assessing the durability of mountain bridges under landslide impacts. In the previous part of the article, it was shown that the mining environment includes impacts in the form of dangerous geological processes, which are characterized by randomness of varying degrees. The next step in modeling uncertainty when developing a method for calculating durability for mountain bridges is to analyze the problem of parameterization of the collapse impact of the mountain environment.

The second part focuses on the parameterization of the shape of the stone, a key but least formalized factor determining local damage to the supports. A geometric apparatus is proposed based on the introduction of an invariant in the form of an equivalent radius, an arithmetic mean radius, and a radius variance forming the acuity parameter. It is shown that for a fixed mass of stone, the arithmetic mean radius is always equal to or less than the invariant in the form of an equivalent radius.

To generate random shapes with a fixed mass, a method of paired stochastic integration has been developed by analogy with the Kantorovich transport problem. A condition for a local balance of normalized volumes of protrusions and depressions is introduced, from which an analytical distribution of relative deviations is obtained, which reduces to a beta distribution. A conjugation parameter has been introduced within the framework of pair integration, which regulates the spatial correlation of stone shapes.

Based on a two-stage impact model (micro impact of the protrusion and macro impact of the main surface), a hazard parameter is constructed that shows how many times this scenario is more dangerous than the reference one. The effect of a «fingerprint» is taken into account — the dependence of the support response on accumulated damage. The total risk is expressed as an integral over the continuum of scenarios.

In this article, the authors describe the problematic points of parameterization of collapse loads in the form of a self-consistent shape of the impact object and the need to introduce a phenomenological connection into the apparatus.

Keywords: rockfall; mountain bridge; fragment shape; paired stochastic integration; beta distribution; two-stage impact model; hazard parameter; risk; Monte Carlo method; self-consistent problem