

Транспортные сооружения / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2026, Том 13, № 3 / 2026, Vol. 13, Iss. 3 <https://t-s.today/issue-3-2026.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/17SATS326.pdf>

DOI: 10.15862/17SATS326 (<https://doi.org/10.15862/17SATS326>)

2.1.9. Строительная механика (технические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Смагин, И. В. Критерий прочности каменной кладки на основе метода поиска опасной плоскости / И. В. Смагин, С. Ю. Лихачева // Транспортные сооружения. — 2026. — Т. 13. — № 3. — URL: <https://t-s.today/PDF/17SATS326.pdf>. DOI: 10.15862/17SATS326.

For citation:

Smagin I.V., Likhacheva S.Yu. A criterion for the strength of masonry based on the method of searching for a dangerous plane. *Russian Journal of Transport Engineering*. 2026;13(3): 17SATS326. Available at: <https://t-s.today/PDF/17SATS326.pdf>. DOI: 10.15862/17SATS326. (In Russ., abstract in Eng.).

УДК 624.048:539.3

Смагин Илья Васильевич

АО «СИСОФТ РАЗРАБОТКА», Нижний Новгород, Россия
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»,
Нижний Новгород, Россия
Аспирант
E-mail: i13vs@ya.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-5284-2464>
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1278068

Лихачева Светлана Юрьевна

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»,
Нижний Новгород, Россия
Профессор кафедры «Теории сооружений и технической механики»,
руководитель научно-образовательных проектов
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: lihsvetlana@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8029-6643>
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=369043

Критерий прочности каменной кладки на основе метода поиска опасной плоскости

Аннотация. Работа посвящена разработке универсального критерия прочности для каменной кладки. Целью исследования является создание модели, способной достоверно описывать предельные состояния кладки при различных видах напряженного состояния и идентифицировать соответствующие механизмы разрушения. В основу разработанного критерия положен метод поиска опасной плоскости. Авторами предложена оригинальная модификация теории прочности Кулона — Мора, в которой начальное сцепление (сопротивление чистому сдвигу) моделируется симметричным тензором четвертого ранга. Такой подход позволяет учесть зависимость прочностных характеристик не только от ориентации нормали к потенциальной плоскости разрушения, но и от направления действия касательных напряжений на этой плоскости относительно осей анизотропии материала. Критерий разрушения от нормальных напряжений (отрыв или раздробление) формулируется с использованием тензора второго ранга. Математическая задача определения ориентации опасной плоскости, на которой реализуется максимум функции разрушения, решается с применением современных численных методов оптимизации (алгоритмы «L-BFGS» и «COBYLA»). Выполнена всесторонняя верификация

предложенной модели на основе сопоставления с результатами известных экспериментальных исследований каменной кладки при одноосном (сжатие, сдвиг с обжатием) и двухосном нагружении. Визуализированы поверхности предельных состояний в пространстве главных напряжений, представляющие собой анизотропные пирамиды Кулона — Мора. Результаты анализа показали, что разработанный критерий позволяет корректно описывать и разграничивать основные режимы разрушения кладки: хрупкий отрыв, сдвиг, локализованный по неперевязанным швам, сдвиг по произвольно ориентированным плоскостям, а также разрушение при сжатии (раскалывание или раздробление).

Ключевые слова: каменная кладка; гомогенизация; критерии прочности; опасная плоскость; численная оптимизация; сдвиг; критерий Кулона — Мора

Введение

Критерии прочности материала служат для оценки его предельного состояния и определения допустимых нагрузок при выполнении деформационного расчета конструкций. В настоящее время существует большое количество критериев прочности каменных конструкций. Некоторые из них основаны на феноменологических подходах, с использованием полиномиальных зависимостей для аппроксимации экспериментальных данных [1–5]. Несмотря на простоту их применения, такие критерии не позволяют судить о характере и режиме разрушения конструкции. Между тем, режимы разрушения во многом определяют характер деформирования кладки.

Существуют универсальные критерии прочности, которые решают данную проблему, например, обобщения критерия Кулона — Мора [6–8], рассматривающие разрушение материала в результате сдвига по определенной плоскости. Такие подходы не могут корректно описать выраженную анизотропию прочности каменной кладки, обусловленную наличием неперевязанных растворных швов.

Существуют методы ограничения области допустимых напряжений через описание физических процессов разрушения каменной кладки [9; 10]. При таком подходе с ростом количества возможных сценариев разрушения материала увеличивается и математическая сложность получаемой в результате модели. Обычно в таких подходах рассматривается несколько вариантов разрушения кладки как на макроуровне, так и на уровне отдельных её компонентов. Например, разрушение в результате сдвига по неперевязанному растворному шву и диагональному раскалыванию, но не рассматриваются промежуточные режимы разрушения. Такие подходы были оправданы при ограниченных вычислительных возможностях. Как правило, геометрия предельных поверхностей таких критериев сильно зависит от экспериментальных данных, на основе которых разрабатывалась модель. Подобные подходы эффективны, но недостаточно универсальны в описании физической природы процессов разрушения.

Для решения этой проблемы можно использовать подход поиска опасной плоскости разрушения [11; 12]. Впервые анизотропные обобщения теорий прочности были описаны в [13], но позже были обобщены на случай действия нормальных напряжений на произвольно ориентированной плоскости, по которой предполагается разрушение. Параллельно критерий прочности для каменной кладки на основании подхода поиска опасной плоскости для плоского напряжённого состояния был разработан в [14], основываясь на работе [11].

Целями данной работы являются: разработка универсального критерия прочности каменной кладки, основанного на методе поиска опасной плоскости, который позволит описывать различные режимы разрушения; разработка способа моделирования сильной анизотропии прочности каменной кладки; проведение валидации предложенного критерия на существующих экспериментальных данных с учётом полученных режимов разрушения; визуализация области предельных напряжений.

Принципы описания критерия при разрушении от действия касательных напряжений

Суть метода заключается в том, что разрушение кладки моделируется на некоторой плоскости по одному из принятых механизмов разрушения, определяемых по максимальным значениям функции разрушения. Таким образом, сохраняется стройность и универсальность математической теории без избыточного числа эмпирических зависимостей. В рамках описанного подхода, функция разрушения на плоскости описывается в следующем виде:

$$F = f(\sigma_n, \tau_n) - c(\mathbf{n}) = 0, \quad (1)$$

где:

σ_n, τ_n — значения нормальных и касательных напряжений на плоскости;

$\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к плоскости;

$c(\mathbf{n})$ — параметры прочности.

Нормальные и касательные напряжения на площадке определяются по зависимостям:

$$\sigma_n = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (2a)$$

$$\tau_n = (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (3a)$$

где:

$\boldsymbol{\delta}$ — символ Кронекера;

$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ — диадное произведение векторов.

Далее зависимости (1) и (2) выражаются в покомпонентной форме, при этом принимается во внимание соглашение Эйнштейна о суммировании:

$$\sigma_i(\mathbf{n}) = (n_k \sigma_{kl} n_l) n_i, \quad (2b)$$

$$\tau_i(\mathbf{n}) = (\delta_{il} - n_i n_l) \sigma_{lk} n_k. \quad (3b)$$

Функция разрушения на площадке принимается по механизму теории прочности Кулона — Мора:

$$\tau_i - \mu_i \sigma_i - C_i = 0, \quad (4)$$

где:

$\mu(\mathbf{n})$ — условный коэффициент трения на площадке, его значение постоянно для всех ориентаций и не зависит от времени и циклов нагружения:

$$\mu_i = \text{const}. \quad (5)$$

Принимается, что начальное сцепление C_i на плоскости с нормалью i зависит от ориентации нормали площадки $\mathbf{n}$ и направления действия касательных напряжений $\mathbf{s}$ на этой площадке относительно естественных осей материала:

$$C_i = f(\mathbf{n}, \mathbf{s}), \quad (6a)$$

при этом, в случае использования тензора четвертого ранга:

$$C(n, s) = A_{ijkl} \cdot n_i \cdot s_j \cdot n_k \cdot s_l. \quad (6b)$$

Исходя из (4), (6b) направление опасной площадки будет определяться выражением:

$$\max_n [\tau_n - \mu \sigma_n - A_{ijkl} n_i s_j n_k s_l]. \quad (7)$$

При этом, считается, что разрушения материала от сдвига произойдет в случае:

$$\tau_n - \mu \sigma_n - A_{ijkl} \cdot n_i s_j n_k s_l \geq 0. \quad (8)$$

Решение методом множителей Лагранжа

Решение (8) можно искать методом множителей Лагранжа. Для этого в качестве условий связи принимаются:

$$n_i n_i - 1 = 0, \quad (9a)$$

$$s_i s_i - 1 = 0, \quad (9б)$$

$$n_i s_i = 0. \quad (9в)$$

Запишем (7) в покомпонентной форме относительно **n** и **s**:

$$F_{n,s} = \sigma_{ij} n_i s_j - \mu \sigma_{ij} n_i n_j - A_{ijkl} n_i s_j n_k s_l. \quad (10)$$

Функция Лагранжа примет вид:

$$L = (\sigma_{ij} n_i s_j - \mu \sigma_{ij} n_i n_j - A_{ijkl} n_i s_j n_k s_l) - \lambda_1 (n_i n_i - 1) - \lambda_2 (s_i s_i - 1) - \lambda_3 (n_i s_i) = 0. \quad (11)$$

Тогда частные производные слагаемого, моделирующего матрицы прочности начальных сцеплений, по компонентам нормали имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial n_m} (A_{ijkl} n_i s_j n_k s_l) = A_{ijkl} \frac{\partial n_i}{\partial n_m} s_j n_k s_l + A_{ijkl} n_i s_j \frac{\partial n_k}{\partial n_m} s_l, \quad (12)$$

при этом принимается во внимание, что $\frac{\partial n_i}{\partial n_m} = \delta_{im}$.

Тогда частные производные по нормали к площадке функции Лагранжа принимают вид:

$$\frac{\partial L}{\partial n_m} = \sigma_{mj} s_j - 2\mu \sigma_{mj} n_j - (A_{mjkl} s_j n_k s_l + A_{ijml} n_i s_j s_l) - 2\lambda_1 n_m - \lambda_3 s_m = 0, \quad (13)$$

где:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — множители Лагранжа.

Частные производные слагаемого, моделирующего матрицы прочности начальных сцеплений по компонентам единичного вектора сдвига, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial s_m} (A_{ijkl} n_i s_j n_k s_l) = A_{ijkl} n_i \frac{\partial s_j}{\partial s_m} n_k s_l + A_{ijkl} n_i s_j n_k \frac{\partial s_l}{\partial s_m}. \quad (14)$$

Частные производные по направлению касательного напряжения на площадке функции Лагранжа принимают вид:

$$\frac{\partial L}{\partial s_m} = \sigma_{mj} n_j - (A_{imkl} n_i n_k s_l + A_{ijkm} n_i s_j n_k) - 2\lambda_2 s_m - \lambda_3 n_m = 0. \quad (15)$$

Решение методом «LM-BFGS»

Для упрощения математического моделирования задача решается в численном виде.

В качестве параметров для оптимизации функции, принимаются углы, определяющие направление радиус-вектора нормали предполагаемой плоскости сдвига:

$$F_{n,s} = F_{\theta,\phi}, \quad (16)$$

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для поиска минимума функции, определяется некоторая начальная точка поиска $x_k = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \phi_k \end{pmatrix}$. В численной постановке решение задачи возможно заменой аналитического поиска градиента функции разрушения методом конечных разностей:

$$\nabla F(x_k) \approx \begin{pmatrix} \frac{F(\theta_k + \varepsilon, \phi_k) - F(\theta_k, \phi_k)}{\varepsilon} \\ \frac{F(\theta_k, \phi_k + \varepsilon) - F(\theta_k, \phi_k)}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где:

ε — некоторая малая величина, например $\varepsilon = 10^{-8}$.

В алгоритме «L-BFGS» не вычисляется напрямую матрица Гессииана $H_k \approx B_k^{-1}$, вместо этого анализируется изменение градиента на последних шагах итерационного расчёта. В качестве начального приближения можно взять единичную матрицу $H_k = I$. Определяются векторы приращений координат и градиента функции:

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \quad (19)$$

$$y_k = \nabla F_{k+1} - \nabla F_k. \quad (20)$$

При этом аппроксимация матрицы Гессииана функции для каждого шага вычисляется по выражению:

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T, \quad (21)$$

где:

$$\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}.$$

Точка, в направлении которой производится поиск:

$$p_k = -H_k \nabla F_k, \quad (22)$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda p_k. \quad (23)$$

Коэффициент λ находится через условия Вольфе. Алгоритм используется до тех пор, пока не выполняется один из критериев остановки — остановка по градиенту или по изменению функции. При этом поиск ведётся, учитывая ограничения вектора x_k , при котором $\theta_k \in (0; \pi)$ и $\phi_k \in (0; 2\pi)$, исходя из симметрии тензора A_{ijkl} .

Тензор прочности

В общем случае, A_{ijkl} представляет собой симметричный тензор прочности четвёртого ранга. Удобно искать закон распределения механических параметров $A(n, s)$ в виде зависимости от характеристик на базовых плоскостях, перпендикулярных к основным осям анизотропии в

зависимости от направлений действия касательных напряжений $\mathbf{s}$. Для поиска соответствующих коэффициентов тензора прочности необходимо задаться некоторыми значениями, которые должны получаться при подстановке единичных векторов $\mathbf{v}$:

$$C(n, s) = A_{ijkl} \cdot n_i \cdot s_j \cdot n_k \cdot s_l. \quad (24)$$

Для нахождения значений коэффициентов тензора A_{ijkl} при заданных характеристиках следует использовать методы численной оптимизации. В текущей работе использован метод «L-BFGS-B». В качестве целевой функции принята разница между ожидаемым значением по принятому направлению и текущим:

$$f = b(j, k) - a(n, s). \quad (25)$$

Таким образом, оптимизационная задача сводится к нахождению таких значений A_{ijkl} , чтобы минимизировать функцию ошибки.

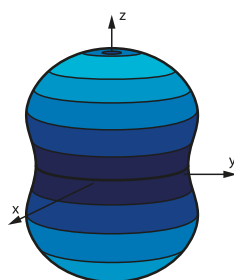


Рисунок 1. Схема распределения максимальных значений начальных сцеплений по различным направлениям относительно осей анизотропии (разработано авторами)

Принципы описания критерия от действия нормальных напряжений

Как и в случае разрушения от сопротивления сдвигу, нормаль к опасной плоскости отрыва не совпадает с направлением главного напряжения. В случае разрушения от нормальных напряжений для описания характеристик прочности достаточно использовать тензор второго ранга:

$$R_i = R(\mathbf{n}), \quad (26)$$

$$R(\mathbf{n}) = A_{ij} \cdot n_i \cdot n_j. \quad (27)$$

В частном случае, можно исключить сложный поиск коэффициентов прочности и использовать только диагональные члены матрицы:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_x & 0 & 0 \\ 0 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где:

R_x, R_y, R_z это значения одноосных пределов сопротивления.

Оптимизационную задачу поиска опасной плоскости можно записать как:

$$\max_n [\sigma_n - R_{ij} \cdot n_i n_j]. \quad (29)$$

При этом, считается, что разрушения материала от сдвига произойдет в случае:

$$\sigma_n - R_{ij} \cdot n_i n_j \geq 0. \quad (30)$$

Способы построения предельной поверхности в пространстве напряжений

Для визуализации критерия прочности анизотропного тела в пространстве главных напряжений необходимо строить несколько предельных поверхностей при различных углах между главными напряжениями и осями анизотропии. В качестве закона перехода из системы координат с осями, направленными вдоль осей анизотропии, в систему координат с осями, направленными вдоль осей главных напряжений, используется матрица вида h_{ij} , где $i = x, y, z$, а $j = 1, 2, 3$.

В отличие от классических подходов, в которых поверхность в пространстве напряжений, изображающая множество напряженных состояний, при которых происходит разрушения материала, напрямую получается из уравнений критерия прочности, в текущем подходе задача сводится к оптимизационным зависимостям, решения которых находятся с помощью численных методов. Поэтому для построения и визуализации предельных поверхностей можно задаться множеством точек в пространстве напряжений, исключить те, при которых в соответствии с принятыми условиями (30), (8) происходит разрушение. Тогда оставшиеся точки, при их достаточной плотности будут описывать предельные поверхности критерия разрушения.

В случае плоского напряженного состояния критерий целесообразно строить в пространстве компонентов тензора напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , заданных относительно осей анизотропии.

Для решения задач поиска максимума можно использовать существующие численные алгоритмы, например, уже упомянутый «L-BFGS-B». Для упрощения моделирования можно допустить, что возможные опасные плоскости дискретно распределены в пространстве. Это позволит сформировать фиксированный набор плоскостей и решить задачу поиска критических напряжений перебором по всему массиву плоскостей. Указанный подход отчасти применялся в [15], но только для одной плоскости, проходящей вдоль непрерыванного шва кладки в условиях плоского напряженного состояния.

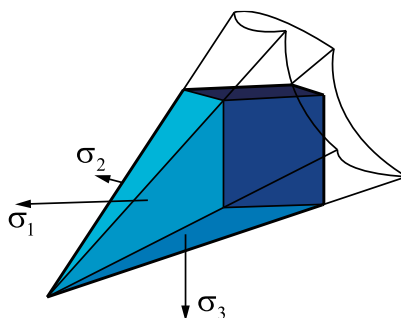


Рисунок 2. Схема предельной поверхности критерия прочности в пространстве главных напряжений при объемном напряженном состоянии (разработано авторами)

В общем виде предельная поверхность (рис. 2) представляет собой анизотропную пирамиду Кулона — Мора, ограниченную поверхностями предельных нормальных напряжений. Форма, пропорции и наклон граней этой поверхности не являются постоянными, а трансформируются в пространстве напряжений в зависимости от угла ориентации действующих главных напряжений относительно естественных осей анизотропии материала.

В частных случаях, при наложении соответствующих физических ограничений на параметры прочности материала, предложенная поверхность вырождается в классические. При переходе к изотропному материалу, полученная предельная поверхность принимает форму классической правильной пирамиды Кулона — Мора. При допущении о независимости предельного

сопротивления сдвигу от нормального напряжения на плоскости (когда условный коэффициент внутреннего трения принимается равным нулю) предельная поверхность сводится к поверхности критерия Треска.

Валидация режимов разрушения критерия прочности

Для проверки предложенного критерия на соответствие действительным режимам разрушения можно использовать испытания образцов малых размеров. Например, в [16] определялись начальное сопротивление кладки сдвигу и угол внутреннего трения при одновременном действии сжимающих и сдвигающих напряжений при различном уровне обжата образцов. Для изготовления образцов кладки использовались стандартный раствор и гиперпрессованный полнотелый кирпич с размерами 250×120×65 мм.

Значения предельных касательных напряжений при отсутствии обжата соответствуют значениям начальных сцеплений в плоскости неперевязанного растворного шва. В силу отсутствия экспериментальных исследований начального сцепления по перпендикулярному направлению, принимается, что значение сцепления перпендикулярно шву в десять раз больше такового вдоль шва. Значение угла внутреннего трения кладки было вычислено аналитически. Исходные данные для построения предельной кривой приведены в таблице 1.

Таблица 1

Принятые исходные данные для критерия прочности

Параметр	Значение параметра на основной плоскости с нормалью:		
	x	y	z
C, начальное сцепление, МПа	1,22	1,22	1,22
R_i^c , предел прочности при сжатии, МПа	28,8	28,8	28,8
R_i^t , предел прочности при растяжении, МПа	2,56	2,56	2,56
μ , коэффициент трения при сжатии, ед.	0,85	0,85	0,85
μ , коэффициент трения при растяжении, ед.	0,4	0,4	0,4

Составлено авторами на основе данных [17; 18]

На рисунке 3 представлено сечение поверхности предельного состояния плоскостью, проходящей через оси системы координат σ_x , τ_{xy} . Это сечение позволяет выделить шесть характерных режимов разрушения, которые различаются по типу напряжённого состояния и ориентации плоскости разрушения. Полученная кривая наглядно демонстрирует, как меняется характер разрушения в зависимости от соотношения нормальных и касательных напряжений, действующих на случайно ориентированной плоскости. Все режимы можно условно разделить на три группы: режимы, связанные с растяжением (Ia, Ib), сжатием (III) и переходные сдвиговые режимы (IIa, IIb, IIc).

Режим Ia обусловлен потерей нормального сцепления по неперевязанному шву кладки. Разрушение происходит из-за растягивающих напряжений, действующих перпендикулярно плоскости шва. Данный режим соответствует хрупкому отрыву по ослабленному сечению. Режим Ib — инициируется действием главных растягивающих напряжений. В рамках данного режима разрушения, с ростом уровня сжимающих и касательных напряжений, направление опасной плоскости разрушения изменяется: угол между нормалью к этой плоскости и нормалью к неперевязанному шву возрастает.

Режим IIa представляет собой сдвиговое разрушение по неперевязанному сечению, происходящее в условиях действия растягивающих напряжений по механизму чистого сдвига. Режим IIb характеризуется разрушением за счёт сдвига, преимущественно локализованного по

плоскости непереязанного шва. В отличие от режима IIa, в данном случае на плоскости действуют сжимающие нормальные напряжения. Сжатие повышает фрикционное сцепление по шву, однако при достижении предельных касательных напряжений происходит разрушение сдвигом. Разрушение при режиме IIb реализуется по сдвиговому механизму в условиях обжатия. Режим IIc определяется сдвигом по случайно ориентированной плоскости. В отличие от ранее описанного режима IIb, локализованного по шву, плоскость разрушения образуется вне горизонтального шва кладки.

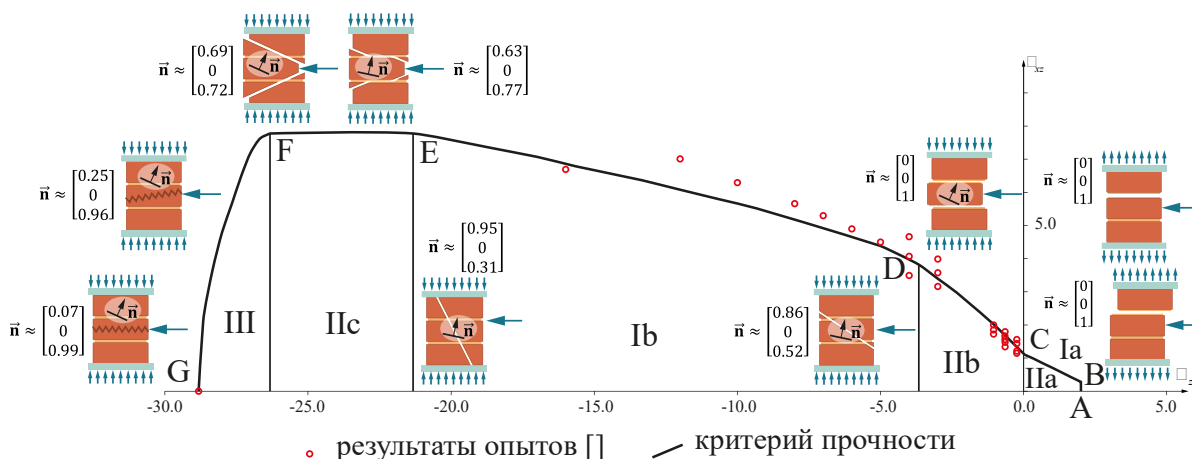


Рисунок 3. Предельная кривая в пространстве нормального и касательного напряжений и результаты экспериментальных исследований (составлено авторами на основе данных [16])

Режим III наступает при превышении предельного значения сжимающих напряжений на некоторой плоскости. Разрушение реализуется по механизму, связанному с исчерпанием несущей способности материала при сжатии: возможны режимы раздробления или, как будет показано далее, раскалывания перпендикулярно плоскости нагружения. Данный режим превалирует в области высоких значений сжимающих напряжений.

Таким образом, в дополнение к уже описанным [16; 19] режимам разрушения в области сжатия, а именно механизмам: нарушения нормального сцепления между раствором и кладочными элементами, превышения главными растягивающими и сжимающими напряжениями пределов сопротивления, были выделены промежуточные режимы разрушения от сдвига (режим IIa), а также показано, что в процессе нагружения меняется направление опасной плоскости в зависимости от соотношения характеристик предельных сопротивлений материала и тензора действующих напряжений.

Валидация критерия прочности в условиях двухосного нагружения

В исследовании [17] проведены двухосные испытания на панелях кирпичной кладки, выполненных из половинчатых кирпичей, выпиленных из прессованной брусчатки, и раствора при объёмном соотношении цемента, извести и песка 1:1:6.

Для построения предельной поверхности необходимо заполнить две матрицы второго ранга, определяющие граничные состояния от действия сжимающих и растягивающих напряжений на плоскости, одну матрицу четвертого ранга для определения начальных сцеплений и задаться значением условного коэффициента трения на плоскости. Для определения предельных значений нормальных сил можно напрямую использовать результаты экспериментальных исследований.

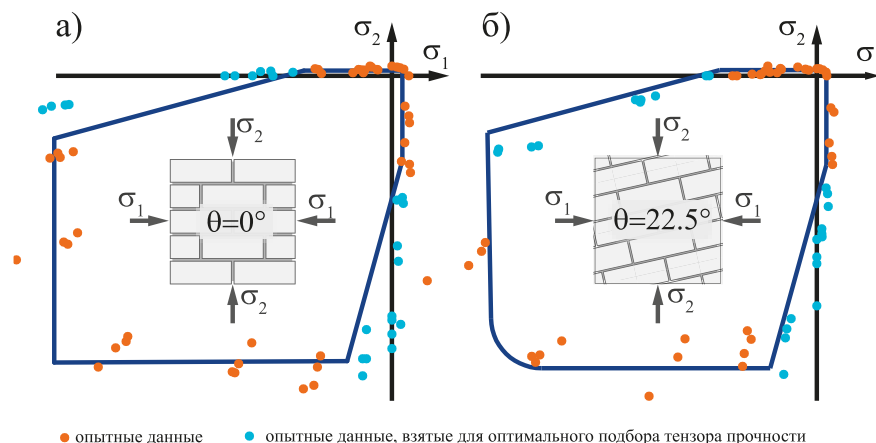


Рисунок 4. Поверхность предельных напряжений в пространстве главных напряжений при угле анизотропии 0° и $22,5^\circ$ (разработано авторами)

Для формирования матрицы прочности начальных сцеплений необходимо иметь значения начальных сцеплений по перевязанному и неперевязанному шву. В случае отсутствия экспериментальных данных, для нахождения значений параметров тензора начальных сцеплений, использован алгоритм численной оптимизации «COBYLA». С этой целью, из множества экспериментальных точек были выбраны те, которые соответствуют ожидаемому режиму разрушения от сдвига, данные точки выделены на рисунках 4–6.

Таблица 2

Принятые исходные данные для валидации критерия прочности

Параметр	Значение параметра на основной плоскости с нормалью:		
	x	y	z
C, начальное сцепление, МПа	По результатам численной аппроксимации		
R_i^t , предел прочности при сжатии, МПа	10,0	10,0	8,5
R_i^c , предел прочности при растяжении, МПа	0,3	0,3	0,15
μ , коэф. трения при сжатии, ед.	0,7	0,7	0,7
μ , коэф. трения при растяжении, ед.	0,4	0,4	0,4

Составлено авторами на основе данных [17; 18]

В качестве целевой функции выбран квадрат разницы между значением функции разрушения при ожидаемом режиме в экспериментальных точках в рамках выбранной теории и ожидаемым значением функции (равным нулю). При этом разница должна быть минимальна:

$$F(A_{ijkl}) = \sum_{i=1}^n \left((F(\sigma_{xy}, A_{ijkl}) - 0)^2 \right) \rightarrow \min. \quad (31)$$

В связи с высокой алгоритмической сложностью вычисления функции разрушения на случайно ориентированной плоскости, было принято решение упростить метод расчета для данной процедуры.

Для ускорения подбора были использованы только диагональные члены матрицы. При этом, функция разрушения рассчитывалась на заранее выбранных плоскостях с шагом 5 градусов. Это позволило избежать необходимости итерационного решения алгоритмически вложенной оптимизационной задачи.

В результате получена предельная поверхность, изображенная на рисунке 6 б в пространстве $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

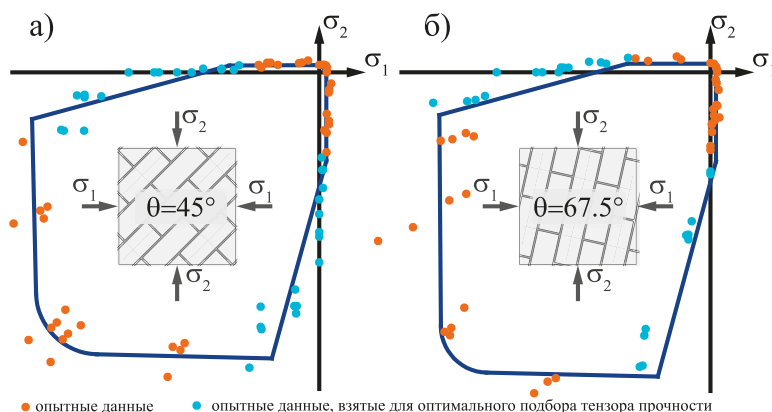


Рисунок 5. Поверхность предельных напряжений в пространстве главных напряжений при угле анизотропии 45° и 67.5° (разработано авторами)

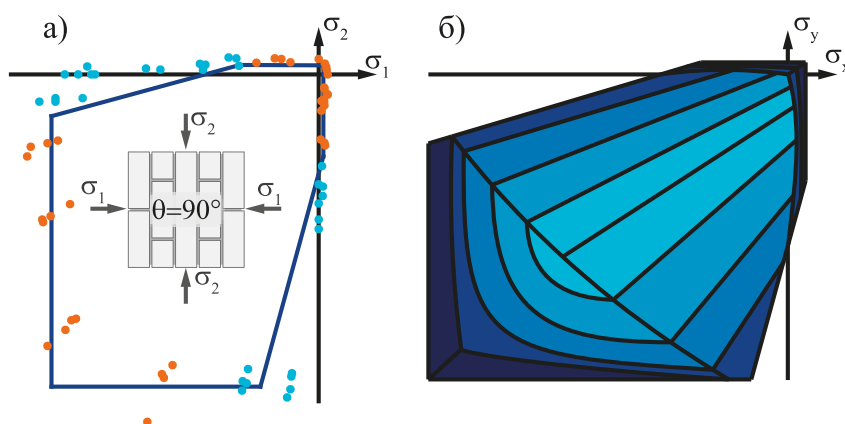


Рисунок 6. Поверхность предельных напряжений в пространстве главных напряжений при угле анизотропии 67.5° (а) и в пространстве нормальных и касательных напряжений по направлениям естественных осей анизотропии каменной кладки (б) (разработано авторами)

В отличие от предыдущего раздела статьи, при превышении критерия максимальных сжимающих напряжений на плоскости, разрушение происходило по режиму раздробления, в текущих опытах, в области двухосного сжатия разрушение происходит преимущественно путем раскалывания в плоскости нагружения. Это следует учитывать при формировании предельных зависимостей критерия прочности, основанного на методе поиска опасной плоскости и определении режимов разрушения. В качестве более общей математической постановки, можно было бы ввести, например, дополнительные критерии прочности на проверку главных деформаций, но это привело бы к значительному усложнению математической модели и увеличению требуемых исходных данных.

Заключение

Разработан и верифицирован критерий прочности для каменной кладки, основанный на методе поиска опасной плоскости разрушения. Данный подход позволяет моделировать различные механизмы разрушения. В отличие от феноменологических подходов, ограниченных сдвигом по неперевязанному шву кладки или диагональным раскалыванием, предложенный критерий позволяет определять промежуточные режимы разрушения. Рассматриваются режимы хрупкого отрыва, сдвиговых режимов по горизонтальному шву и на случайно ориентированных плоскостях, разрушения от действия нормальных напряжений (раздробление или раскалывание). Показано, что в процессе нагружения направление опасной плоскости изменяется, что ранее не учитывалось в большинстве моделей.

При одноосном нагружении получена зависимость, демонстрирующая плавный переход между режимами отрыва, сдвига и сжатия. Установлено, что предложенный критерий строго вырождается в классические теории (Кулона — Мора, Треска) при наложении соответствующих физических ограничений на параметры материала.

Предложена модификация критерия Кулона — Мора для анизотропных тел, в которой начальное сцепление на плоскости представлено с помощью симметричного тензора 4-го ранга. Это позволяет учитывать зависимость сопротивления сдвигу не только от ориентации нормали к плоскости, но и от направления действия касательных напряжений. Для поиска опасной ориентации плоскости применены численные методы оптимизации («L-BFGS», «COBYLA»).

Разработанный критерий позволяет строить предельные поверхности в пространстве напряжений, определять не только предельные напряжения, но также направление плоскости, по которой происходит разрушение и соответствующий механизм потери несущей способности. Для корректного описания всех предполагаемых режимов разрушения возможно введение дополнительных критериев (например, по предельным деформациям), что увеличит сложность модели и требования к объему экспериментальных данных. Перспективы дальнейших исследований связаны с адаптацией критерия для циклических и динамических нагружений, введением дополнительных условий разрушения, а также с разработкой упрощенных инженерных методик, использующих предложенный численный аппарат для инженерной практики расчета каменных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dhanasekar M. The failure of brick masonry under biaxial stresses / M. Dhanasekar, A. Page, P. Kleeman // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. — 1985. — Т. 79, № 2. — С. 295–313. — URL: <http://www.emerald.com/jpric/article/79/2/295-313/414929>. — DOI: [10.1680/icep.1985.992](https://doi.org/10.1680/icep.1985.992). (дата обращения: 22.08.2025).
2. An orthotropic damage model for masonry structures / L. Berto, A. Satta, R. Scotta, R. Vitaliani // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2002. — Т. 55, № 2. — С. 127–157. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.495>. — DOI: [10.1002/nme.495](https://doi.org/10.1002/nme.495). (дата обращения: 24.08.2025).
3. Ghiassi B. A simplified model for analysis of unreinforced masonry shear walls under combined axial, shear and flexural loading / B. Ghiassi, M. Soltani, A.A. Tasnimi // *Engineering Structures*. — 2012. — Т. 42. — С. 396–409. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029612002386>. — DOI: [10.1016/j.engstruct.2012.05.002](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.05.002). (дата обращения: 22.08.2025).
4. Syrmakezis C.A. Masonry Failure Criterion under Biaxial Stress State / C.A. Syrmakezis, P.G. Asteris // *Journal of Materials in Civil Engineering*. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 58–64. — URL: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290899-1561%282001%2913%3A1%2858%29>. — DOI: [10.1061/\(ASCE\)0899-1561\(2001\)13:1\(58\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0899-1561(2001)13:1(58)). (дата обращения: 09.06.2024).
5. Bilko P. An Orthotropic Elastic-Plastic Constitutive Model for Masonry Walls / P. Bilko, Leszek Małyszko // *Materials*. — 2020. — Т. 13, № 18. — С. 4064. — URL: <https://www.mdpi.com/1996-1944/13/18/4064>. — DOI: [10.3390/ma13184064](https://doi.org/10.3390/ma13184064). — EDN: [HXNWBZ](https://www.edn.org/HXNWBZ). (дата обращения: 26.08.2025).
6. Matsuoka H. On the significance of the "spatial mobilized plane" / H. Matsuoka // *Soils and Foundations*. — 1976. — Т. 16, № 1. — С. 91–100. — DOI: [10.3208/sandf1972.16.91](https://doi.org/10.3208/sandf1972.16.91). (дата обращения: 19.10.2026).

7. Griffiths D.V. Observations on the extended Matsuoka-Nakai failure criterion / D.V. Griffiths, J. Huang // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2009. — Т. 33, № 17. — С. 1889–1905. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.810>. — DOI: [10.1002/nag.810](https://doi.org/10.1002/nag.810). (дата обращения: 26.03.2026).
8. Three-dimensional strength criterion for rocks: A review / J. Liu, X. Li, J. Xiao [et al.] // Energy Reviews. — 2024. — Т. 3, № 4. — С. 100102. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S277297022400035X>. — DOI: [10.1016/j.enrev.2024.100102](https://doi.org/10.1016/j.enrev.2024.100102). — EDN: [RLRXWV](https://www.edn.net/RLRXWV). (дата обращения: 18.02.2026).
9. Lishak V. I. 2-D Orthotropic failure criteria for masonry / V. I. Lishak, V. I. Yagust, D. Z. Yankelevsky // Engineering Structures. — 2012. — Т. 36. — С. 360–371. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029611004809>. — DOI: [10.1016/j.engstruct.2011.11.033](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.11.033). (дата обращения: 24.08.2025).
10. Гениев Г. А. О критерии прочности каменной кладки при плоском напряженном состоянии / Г. А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений. — 1979. — № 2. — С. 7–11. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36892937>. — EDN: [YVWKUX](https://www.edn.net/YVWKUX). (дата обращения: 23.03.2024).
11. Pietruszczak S. On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials / S. Pietruszczak, Z. Mroz // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2001. — Т. 25, № 5. — С. 509–524. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.141>. — DOI: [10.1002/nag.141](https://doi.org/10.1002/nag.141). (дата обращения: 24.09.2025).
12. Гениев Г. А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов / Г. А. Гениев, А. С. Курбатов, Ф. А. Самедов. — Москва: Интербук, 1993. — 187 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001685094>. (дата обращения: 18.10.2026).
13. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — Москва: Наука, 1966. — 231 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01006215662>. (дата обращения: 18.10.2026).
14. Ushaksaraei R. Failure Criterion for Structural Masonry based on Critical Plane Approach / R. Ushaksaraei, S. Pietruszczak // Journal of Engineering Mechanics. — 2002. — Т. 128, № 7. — С. 769–778. — URL: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9399%282002%29128%3A7%28769%29>. — DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:7\(769\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:7(769)). (дата обращения: 01.02.2026).
15. Sousamli M. A total-strain based orthotropic continuum model for the cyclic nonlinear behavior of unreinforced brick masonry structures / M. Sousamli, F. Messali, J.G. Rots // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2022. — Т. 123, № 8. — С. 1813–1840. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.6917>. — DOI: [10.1002/nme.6917](https://doi.org/10.1002/nme.6917). — EDN: [ATQZMJ](https://www.edn.net/ATQZMJ). (дата обращения: 22.09.2025).
16. Демчук И. Е. Экспериментально-теоретические исследования каменной кладки при сдвиге с обжатием / И. Е. Демчук // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Строительство и архитектура. — 2016. — № 1. — С. 112–116. — URL: <https://rep.bstu.by/handle/data/561>. — EDN: [YWUOGT](https://www.edn.net/YWUOGT). (дата обращения: 04.12.2024).
17. Page A.W. The biaxial compressive strength of brick masonry / A.W. Page // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. — 1981. — Т. 71, № 3. — С. 893–906. — DOI: [10.1680/iicep.1981.1825](https://doi.org/10.1680/iicep.1981.1825). (дата обращения: 09.06.2024).

18. Asteris P.G. Anisotropic masonry failure criterion using artificial neural networks / P.G. Asteris, V. Plevris // Neural Computing and Applications. — 2017. — Т. 28, № 8. — С. 2207–2229. — URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00521-016-2181-3>. — DOI: [10.1007/s00521-016-2181-3](https://doi.org/10.1007/s00521-016-2181-3). — EDN: [AWRGRW](https://www.edn.net/AWRGRW). (дата обращения: 26.08.2025).
19. Derkach V.N. Limit Values of Shear Strength for Masonry Made of Porous Ceramic Blocks / V.N. Derkach, I.E. Demchuk, P.I. Matyas // Building and Reconstruction. — 2025. — № 2. — С. 56–64. — URL: <https://construction.elpub.ru/jour/article/view/882>. — DOI: [10.33979/2073-7416-2025-118-2-56-64](https://doi.org/10.33979/2073-7416-2025-118-2-56-64). — EDN: [KFJTIB](https://www.edn.net/KFJTIB). (дата обращения: 17.02.2026).

Smagin Ilya Vasilievich

ООО «KM-CENTER», Nizhny Novgorod, Russia
Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: i13vs@ya.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-5284-2464>
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1278068

Likhacheva Svetlana Yurevna

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: lihsvetlana@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8029-6643>
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=369043

A criterion for the strength of masonry based on the method of searching for a dangerous plane

Abstract. The work is devoted to the development of a universal strength criterion for masonry. The aim of the study is to create a model capable of reliably describing the limiting states of masonry under various types of stress conditions and identifying the corresponding mechanisms of destruction. The developed criterion is based on the method of searching for a critical site. The authors propose an original modification of the Coulomb — Mohr strength theory, in which the initial adhesion (resistance to net shear) is modeled by a symmetric tensor of the fourth rank. This approach allows us to take into account the dependence of strength characteristics not only on the orientation of the normal to the potential fracture site, but also on the direction of action of tangential stresses on this site relative to the axes of anisotropy of the material. The criterion of fracture from normal stresses (separation or fragmentation) is formulated using a tensor of the second rank. The mathematical problem of determining the orientation of the critical site where the maximum of the destruction function is realized is solved using modern numerical optimization methods (algorithms «L-BFGS» and «COBYLA»). A comprehensive verification of the proposed model has been performed based on comparison with the results of well-known experimental studies of masonry under uniaxial (compression, shear with compression) and biaxial loading. The surfaces of limit states in the main stress space, which are anisotropic Coulomb — Mohr pyramids, are visualized. The results of the analysis showed that the developed criterion makes it possible to correctly describe and distinguish the main modes of masonry destruction: brittle separation, shear localized along loose seams, shear along arbitrarily oriented sites, as well as compression fracture (splitting or fragmentation).

Keywords: masonry; homogenization; strength criteria; critical site; numerical optimization; shear; Coulomb — Mohr criterion