Интернет-журнал «Транспортные сооружения» <https://t-s.today>
Russian journal of transport engineering

2019, №3, Том 6 / 2019, No 3, Vol 6 <https://t-s.today/issue-3-2019.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/16SATS319.pdf>

DOI: 10.15862/16SATS319 (<http://dx.doi.org/10.15862/16SATS319>)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Шепитько Е.С. Калибровка модели нелокального демпфирования материала с использованием данных численного эксперимента // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2019 №3, <https://t-s.today/PDF/16SATS319.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/16SATS319

For citation:

Shepitko E.S. (2019). Calibration of nonlocal damping model based on numerical simulation results. *Russian journal of transport engineering*, [online] 3(6). Available at: <https://t-s.today/PDF/16SATS319.pdf> (in Russian). DOI: 10.15862/16SATS319

УДК 72

Шепитько Елена Сергеевна

ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)», Москва, Россия

Аспирант

E-mail: shepitko-es@mail.ru

Калибровка модели нелокального демпфирования материала с использованием данных численного эксперимента

Аннотация. Статья посвящена моделированию динамического поведения стержней, выполненных из полимер-композитных материалов. В качестве модели внутреннего трения материала используется модель нелокального демпфирования. Колебательный процесс рассматривается на примере стержня, жёстко закреплённого по концам. Уравнение движения стержня, построенное с учётом нелокального демпфирования, решается методом Бубнова-Галёркина. Определяется количество форм собственных колебаний, учёт которых необходим для достижения требуемой точности расчёта. В статье рассматривается влияние изменения параметров модели нелокального демпфирования на характеристики процесса колебаний стержня под действием детерминированной периодической нагрузки. Процесс калибровки модели нелокального демпфирования, заключается в определении её параметра, называемого масштабом влияния и характеризующего степень нелокальности демпфирования материала. Калибровка производится методом наименьших квадратов на основании данных численного эксперимента. В качестве численного эксперимента использовались результаты трёхмерного конечно-элементного моделирования колебаний стержня, выполненного из термореактивного винилэфирного стеклопластика, нагруженного мгновенно приложенной равномерно распределённой нагрузкой. Трёхмерная конечно-элементная модель стержня была построена в расчётном комплексе SIMULIA Abaqus с учётом ортотропных свойств композитного материала. Достоверность откалиброванной модели подтверждалась на стержнях с изменёнными геометрическими характеристиками. Результаты, приведённые в статье, получены в ходе диссертационного исследования, выполненного автором.

Ключевые слова: колебания стержней; внутреннее трение; нелокальное демпфирование; полимер-композитные материалы; метод конечных элементов; метод наименьших квадратов; компьютерное моделирование

Введение

В настоящее время композитные материалы находят всё более широкое применение в самых разных отраслях промышленности, таких как авиастроение, судостроение, автомобильная промышленность и др. В строительной отрасли, в частности, в транспортном строительстве, элементы конструкций, выполненные из композитных материалов, также используются всё более активно. Среди основных достоинств таких материалов можно назвать высокую прочность при относительно небольшом собственном весе, значительную выносливость, коррозионную стойкость и стойкость к тепловым воздействиям.

Несмотря на многочисленные достоинства композитных материалов, их потенциал в строительстве еще до конца не раскрыт. Проводится большое количество исследований их работы на статические и динамические воздействия, но предсказать их поведение в долгосрочной перспективе пока еще достаточно сложно.

Моделирование колебаний конструктивных элементов, выполненных из композитных материалов, является непростой задачей, причём наибольшую сложность представляет описание внутреннего трения в материале. Для достижения достаточной точности численного расчёта, как правило, используются трёхмерные конечно-элементные модели, позволяющие учесть ортотропные или анизотропные свойства материала. Но в некоторых случаях использование одномерных моделей стержневых элементов в качестве расчетных схем является более эффективным, по сравнению с подробным трёхмерным моделированием. К примеру, на стадии вариантного проектирования, когда необходимо проверить и отбраковать большое количество вариантов. В таких случаях необходимы соответствующие модели внутреннего трения достаточно гибкие для того, чтобы описывать процесс затухания колебаний в анизотропных материалах. Требуемой гибкости можно добиться, рассматривая демпфирующие свойства материала, как нелокальные.

Модель внутреннего трения, основанная на таком подходе, называется моделью нелокального демпфирования материала [1]. Предполагается, что демпфирование в некоторой точке стержня с координатой x_1 , отсчитываемой вдоль его оси, считается зависящим не только от локального значения скорости изменения деформаций в той же точке $\dot{\varepsilon}(x_1)$, но и от значения скоростей изменения деформаций в соседних точках на некоторой области, прилегающей к рассматриваемой точке. Степень влияния демпфирующих свойств соседних точек друг на друга тем меньше, чем больше расстояние между ними [2].

В статье моделируется динамическое поведение стержня, выполненного из пластика, армированного стекловолокном, и жёстко защемлённого по концам, с учётом нелокального демпфирования материала под действием детерминированной периодической и мгновенно приложенной равномерно распределённых нагрузок.

Моделирование динамического поведения стержня с учётом нелокального демпфирования

Для описания процесса демпфирования колебаний стержней часто используется гипотеза Фойгта:

$$\sigma = E\varepsilon + \gamma E\dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где: σ , ε – нормальное напряжение и относительная осевая деформация, $\dot{\varepsilon}$ – скорость изменения деформации, E – модуль Юнга, γ – коэффициент демпфирования.

С учётом нелокального демпфирования выражение (1) принимает вид [2]:

$$\sigma(x, t) = E[\varepsilon(x, t) + \gamma \int_0^l C_v(|x - \theta|) \dot{\varepsilon}(\theta, t) d\theta]. \quad (2)$$

здесь $C_v(|x - \theta|)$ – ядро оператора, характеризующего внутреннее демпфирование, $|x - \theta|$ – расстояние между соседними точками.

Функция $C_v(|x - \theta|)$ удовлетворяет условиям нормирования, то есть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_v(|x - \theta|) d\theta = 1. \quad (3)$$

Ядро оператора внутреннего демпфирования может иметь различный вид. Наиболее характерными являются: прямоугольное ядро, треугольное ядро, ядро в виде функции ошибок, ядро в виде экспоненциальной функции [3; 4]. На сегодняшний день ни одна из перечисленных функций не имеет обоснования с точки зрения физики и внутренней структуры материала, все они являются математическими идеализациями. В настоящей статье рассматриваются и сравниваются два ядра оператора внутреннего демпфирования:

1) экспоненциальное ядро

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu|x-\theta|}, \quad (4)$$

2) ядро в виде функции ошибок

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2(x-\theta)^2}{2}}. \quad (5)$$

Здесь μ характеризующий степень нелокальности демпфирования материала, называемый масштабом влияния.

Общее уравнение движения изгибаемого стержня имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - q(x, t). \quad (6)$$

Здесь $w(x, t)$ – прогиб стержня, m – погонная масса стержня, $q(x, t)$ – интенсивность погонной поперечной нагрузки.

Используя соотношение (2) и гипотезу плоских сечений, получим выражение для изгибающего момента с учётом нелокального демпфирования:

$$M(x, t) = -EI \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \gamma \int_0^l C_v(|x - \theta|) \frac{\partial^3 w(\theta, t)}{\partial \theta^2 \partial t} d\theta \right], \quad (7)$$

где EI – изгибная жесткость стержня.

Подставляя в левую часть соотношения (6) выражение второй производной по x от изгибающего момента $M(x, t)$ (7), приходим к уравнению равновесия колеблющегося стержня, записанному относительно функции прогибов $w(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \left[\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l C_v(|x - \theta|) \frac{\partial^3 w(\theta, t)}{\partial \theta^2 \partial t} d\theta \right] = \frac{q(x, t)}{m}. \quad (8)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$.

Для решения уравнения (8) используется метод Бубнова-Галеркина. Функцию $w(x, t)$ будем искать в виде её разложения по формам собственных колебаний упругого стержня:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) V_i(x). \quad (9)$$

Здесь $f_i(t)$ – обобщённые перемещения, а $V_i(x)$ – базисные функции.

Базисные функции для стержня, жёстко закреплённого по концам, имеют вид [5]:

$$V_i(x) = (shk_i l - sink_i l)(chk_i x - cosk_i x) - (chk_i l - cosk_i l)(shk_i x - sink_i x). \quad (10)$$

Здесь k_i – i -ый корень характеристического уравнения $ch(kl) \cos(kl) = 1$.

В результате преобразований и с использованием экспоненциального ядра оператора внутреннего демпфирования (4) получим систему уравнений движения стержня:

$$\ddot{f}_j(\tau) + \frac{k_j^4}{k_1^4} f_j(\tau) + \frac{\gamma \mu l \omega_1}{2 a_j k_1^4} \sum_{i=1}^n \int_0^1 V_j^{II}(z) \int_0^1 e^{-\mu l |z-y|} V_i^{II}(y) dy dz \dot{f}_i(\tau) = \frac{q(\tau) l^4}{a_j k_1^4 EI} \int_0^1 V_j(z) dz, \quad (11)$$

где ω_i – собственные частоты, $a_j = \int_0^1 V_j^2(z) dz$, z и y – безразмерные координаты – $z = x/l$, $y = \theta/l$, τ – безразмерное время $\tau = t \cdot \omega_1$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1^4 EI}{ml^4}}$ – первая собственная частота.

В программном комплексе MATLAB были разработаны программы, позволяющие определить обобщённые перемещения методом Рунге-Кутты IV порядка [6].

Колебания стержня под действием детерминированной периодической нагрузки

Прежде чем переходить к моделированию динамического поведения стержня, оценим необходимое для получения достаточной точности результатов количество форм собственных колебаний [7]. Для этого стержень рассматривался под действием мгновенно приложенной равномерно распределённой нагрузки интенсивностью $q = 10000$ кН/м. Рассматривалась балка длиной 10 м и изгибной жесткостью $EI = 9,63 \cdot 10^6$ кН·м². Значения прогибов в середине стержня, вычисленные для момента времени 70 с, когда энергия колебательного процесса уже полностью рассеялась, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Прогибы в середине стержня при учёте
различного количества форма собственных колебаний

Количество форм	Величина прогиба в середине стержня, м
1	-0.0268
3	-0.0264
5	-0.0265
7	-0.0265

Разработано автором

Чтобы оценить влияние учёта нелокального демпфирования на результаты моделирования динамического поведения стержня, рассмотрим его колебательный процесс под действием периодической нагрузки, изменяющейся по синусоидальному закону:

$$q = A \cdot \sin(\omega t), \quad (12)$$

где A – амплитуда изменения нагрузки, вызывающей колебания, ω – ее частота, t – время.

Степень нелокальности демпфирования в модели (11) определяется значением масштаба влияния (параметра μ). Чем больше значение μ , тем ближе рассматриваемая модель к традиционной фойгтовской модели затухания колебаний (рис. 1).

Рисунок 1. Экспоненциальное ядро оператора внутреннего демпфирования при различных μ (разработано автором)

Процесс колебаний стержня под действием периодической нагрузки $\mu = 0.2$ 1/м представлен на рисунке 2.

Рисунок 2. Процесс колебаний стержня под действием периодической нагрузки ($\mu = 0.2$ 1/м) (разработано автором)

Для сравнения результатов, полученных при различных значениях параметра μ , амплитуды прогибов в среднем сечении стержня приведены в таблице 2.

Таблица 2

Амплитуды прогибов стержня при различных значениях μ

Масштаб влияния μ , 1/м	Амплитуда прогиба в середине стержня, м
0.2	0.0350
0.5	0.0304
1	0.0237

Разработано автором

Из таблицы 2 видно, что с увеличением параметра μ уменьшается амплитуда колебаний. Таким образом, наименьшая амплитуда наблюдается при использовании классической модели вязкоупругого материала Фойгта.

Калибровка модели нелокального демпфирования материала

Для того, чтобы модель нелокального демпфирования можно было использовать в расчётах, необходимо подобрать такие значения параметра μ , которое позволит наилучшим образом аппроксимировать данные численного или реального эксперимента.

Рассмотрим стержень длиной 6 м прямоугольного поперечного сечения, выполненный из терморезистивного винилэфирного стеклопластика I класса. Стержень закреплён по концам и нагружен мгновенно приложенной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 10$ кН/м.

Характеристики терморезистивного винилэфирного стеклопластика определялись экспериментально в работах [8–10] и приведены в таблице 3.

Таблица 3

Характеристики терморезистивного винилэфирного стеклопластика

Модуль Юнга в продольном направлении, E_{lw}	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении, E_{cw}	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, μ_{lw}	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении, μ_{cw}	0,15
Плотность материала, ρ	1,9 кН/м ³
Коэффициент демпфирования, γ	0,042
Прочность на разрыв, $\sigma_{разр}$	241 МПа

[8–10]

Для построения трёхмерной конечно-элементной модели и динамического расчета стержневого элемента использовался верифицированный расчётный программный комплекс SIMULIA Abaqus CAE. Полученные данные были импортированы в программный комплекс MATLAB.

Подбор параметра μ производится с помощью метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - f_i(\mu))^2 \rightarrow \min. \quad (13)$$

Здесь e_i^2 – квадратичная ошибка в i -ый момент времени колебательного процесса;

y_i – значение прогиба, полученное в момент времени i с использованием трёхмерной ортотропной модели стержня;

$f_i(\mu)$ – значение прогиба, полученное в момент времени i с использованием одномерной модели, построенной на основе гипотезы нелокального демпфирования;

N – количество рассматриваемых временных точек.

Значение подобранного параметра $\mu = 1.07$ 1/м. Сравнение результатов одномерного моделирования колебаний стержневого элемента с учетом нелокального демпфирования при таком значении с результатами численного эксперимента представлено на рисунке 3.

Рисунок 3. Сравнение результатов численного эксперимента, с результатами одномерного моделирования по откалиброванной модели нелокального демпфирования (разработано автором)

Для того чтобы оценить величину расхождения результатов была вычислена среднеквадратическая ошибка σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f_i(\mu))^2}{N}}. \quad (14)$$

Относительно прогиба в момент времени 30с среднеквадратическая ошибка составляет 3 %.

Теперь сравним результаты, полученные путём трёхмерного конечно элементного моделирования с результатами, полученными с использованием гипотезы Фойгта (рис. 4).

Рисунок 4. Сравнение результатов численного эксперимента, с результатами одномерного моделирования по гипотезе Фойгта (разработано автором)

Разница между результатами очевидна, а величина относительной ошибки увеличилась более чем в 5 раз и составляет 16,7 %.

Масштаб влияния μ является параметром материала. Значит, подобранный методом наименьших квадратов параметр μ должен давать достаточно точные результаты при моделировании динамического поведения стержней из того же материала вне зависимости от их геометрии. Для обоснования достоверности откалиброванной модели проводилось сравнение для стержней с измененной геометрией.

Также проводилось сравнение полученных результатов для модели нелокального демпфирования с ядром в виде функции ошибок (таблица 4).

Таблица 4

Сравнение масштабов влияния μ и относительных ошибок для различных ядер оператора внутреннего демпфирования

Тип ядровой функции	Подобранное значение параметра μ	Геометрия стержня	Относительная ошибка, %
Экспоненциальная	1.07	6 м, 0,2х0,3 м	3.1
		7 м, 0,2х0,3 м	3.2
		7 м, 0,3х0,4 м	4
Функция ошибок	0.96	6 м, 0,2х0,3 м	3.1
		7 м, 0,2х0,3 м	3.2
		7 м, 0,3х0,4 м	4

Разработано автором

Значения относительных ошибок не превышают 5 %. Значит, модель нелокального демпфирования может быть использована при моделировании динамического поведения стержней из композитных материалов в одномерной постановке.

Между значениями относительных ошибок, полученными для различных ядер оператора внутреннего демпфирования, разница почти отсутствует, а значит, каждое из них может быть одинаково обоснованно и успешно использовано для описания внутреннего трения в стержневых элементах, выполненных из термореактивного винилэфирного стеклопластика.

Заключение

В сравнении с локальными моделями, представленная в статье модель позволяет более достоверно и гибко управлять основными характеристиками моделируемого колебательного процесса. Повышенная гибкость даёт возможность использовать одномерные модели стержневых элементов при динамическом расчёте конструкций из современных композитных материалов, обладающих ортотропными свойствами.

Откалиброванная с использованием метода наименьших квадратов модель нелокального демпфирования материала позволяет с удовлетворительной точностью аппроксимировать данные численного эксперимента. Величина относительной ошибки остаётся в пределах 5 %.

Результаты, полученных с использованием двух разных ядер оператора внутреннего демпфирования – экспоненциального ядра и ядра в виде функции ошибок – почти не отличаются друг от друга. Разработка ядра оператора внутреннего трения на основании внутренней структуры материала является объектом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banks H.T. and Inman D.J. 1991 On damping Mechanisms in Beams Journal of Applied Mechanics 58(3) pp. 716–723.
2. Lei Y., Friswell M.I. and Adhikari S. 2006 A. Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping Int. Journal of Solids and Structures 43 pp. 3381–3400.
3. Russell D.L. 1992 On Mathematical Models for the Elastic Beam with Frequency-Proportional Damping Banks, H.T. (Ed.), Control and Estimation in Distributed Parameter Systems (Philadelphia: SIAM) pp. 125–169.
4. Потапов В.Д. Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования. Проблемы машиностроения и теории надежности, 2012, 4, с. 25–31.
5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб пособие. – 2-е изд. исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
7. Fyodorov V.S., Sidorov V.N. and Shepitko E.S. 2018 Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 012040.
8. Landherr J.C. Dynamic analysis of a FRP deployable box beam. Master of Applied Science Thesis. Kingston: Queen's University, 2008.
9. Lim R.A. 2016 Structural monitoring of a 10 m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage (Kingston: Queen's University).
10. Xie A. Development of an FRP Deployable Bridge, Master of Applied Science Thesis, Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.

Shepitko Elena Sergeevna

Russian university of transport (MIIT), Moscow, Russia
E-mail: shepitko-es@mail.ru

Calibration of nonlocal damping model based on numerical simulation results

Abstract. The paper is devoted to polymer composite beams dynamic behavior simulation. The nonlocal damping model is used as a model of the internal friction. The vibration process is considered in this paper using the beam with fixed ends as an example. Equation of beam motion considering nonlocal damping is solved by Galerkin method to develop the model. The required number of eigenmodes is obtained for the beam under an instantly applied distributed load. The influence of nonlocal damping model parameters variation on the beam vibration process simulation results is considered under a periodic deterministic distributed load. The calibration of nonlocal damping model consists of defining its parameter known as influence distance which characterize the level of the nonlocal properties in material. Calibration is carried out with the least squares method using the numerical simulation data. For this purpose the results of 3D finite element modeling of thermoset vinyl ester fiber reinforced plastic beam vibrations under the instantly applied load were used. The 3D finite element model of the beam was created in SIMULIA Abaqus taking into account the orthotropic properties of the material. The calibrated model was justified for the beams with changed geometry. The results presented in this paper were obtained during the research for the PhD thesis.

Keywords: beam vibrations; internal friction; nonlocal damping; polymer composite materials; finite element analysis; least squares method; computer simulation

REFERENCES

1. Banks H.T., Inman D.J. (1991). On damping Mechanisms in Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 58(3), pp. 716–723.
2. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. (2006). A. Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping. *Int. Journal of Solids and Structures*, 43, pp. 3381–3400.
3. Russell D.L. (1992). *On Mathematical Models for the Elastic Beam with Frequency-Proportional Damping Banks, H.T. (Ed.). Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*. Philadelphia: SIAM, pp. 125–169.
4. Potapov V.D. (2012). Stability of the rods under stochastic loading taking into account nonlocal damping. *Problems of mechanical engineering and reliability theory*, 4, pp. 25–31.
5. Filippov A.P. (1970). *Kolebaniya deformiruemykh sistem. [Oscillations of deformable systems.]* Moscow: Engineering, p. 734.
6. Kalitkin N.N. (2011). *Chislennyye metody. [Numerical methods.]* Saint Petersburg: BHV-Petersburg, p. 592.
7. Fyodorov V.S., Sidorov V.N., Shepitko E.S. (2018). *Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*.
8. Landherr J.C. (2008). *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam. Master of Applied Science Thesis*. Kingston: Queen's University.
9. Lim R.A. (2016). *Structural monitoring of a 10 m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage*. Kingston: Queen's University.
10. Xie A. (2007). *Development of an FRP Deployable Bridge*. Royal Military College of Canada.