

Транспортные сооружения / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2026, Том 13, № 1 / 2026, Vol. 13, Iss. 1 <https://t-s.today/issue-1-2026.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/14SATS126.pdf>

DOI: 10.15862/14SATS126 (<https://doi.org/10.15862/14SATS126>)

2.1.8. Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей (технические науки)

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Рыбаков, С. В. Расчетное обоснование конструкции объединения гибридного пролетного строения моста.

Часть 2 / С. В. Рыбаков // Транспортные сооружения. — 2026. — Т. 13. — № 1. — URL:

<https://t-s.today/PDF/14SATS126.pdf>. DOI: 10.15862/14SATS126.

**For citation:**

Rybakov S.V. Computational justification for the design of a hybrid bridge superstructure. Part 2. *Russian Journal of Transport Engineering*. 2026;13(1): 14SATS126. Available at: <https://t-s.today/PDF/14SATS126.pdf>.

DOI: 10.15862/14SATS126. (In Russ., abstract in Eng.).

*Работа выполнена в рамках выполнения гранта Министерства науки и высшего образования № 075-15-2024-559, АРКТИКА*

УДК 624.21; 624.21.09; 624.21.016

**Рыбаков Сергей Викторович**

ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия

Аспирант

E-mail: [Rybakov.sv@bk.ru](mailto:Rybakov.sv@bk.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0810-7994>

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=1178306](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1178306)

## Расчетное обоснование конструкции объединения гибридного пролетного строения моста. Часть 2

**Аннотация.** В статье представлена вторая часть расчетного обоснования конструкции узла объединения монолитной железобетонной плиты с главной балкой пролетного строения из полимерного композиционного материала.

Целью исследования является разработка и обоснование аналитической методики расчета элементов узла объединения гибридного пролетного строения моста, а также обоснование его геометрических параметров. Предлагаемая методика должна обеспечивать прочность соединения при известных усилиях сдвига и отрыва, действующих на шпильку.

Решение поставленной задачи обеспечивает получение аналитических зависимостей, связывающих усилия, передаваемые от плиты ездового полотна к главной балке, предел прочности полимерного композиционного материала и геометрические параметры узла объединения. Это позволяет применять методику при инженерном проектировании узлов объединения гибридных мостовых конструкций.

Расчет внешней шайбы и головки болта выполняется в рамках положений теории изгиба сплошных и кольцевых пластин. Выбор данного математического аппарата обусловлен характером нагружения шайб и головки болта, работающих преимущественно на изгиб при передаче усилия предварительного натяжения через контактные поверхности. Внешняя шайба и головка болта рассматриваются как упругие кольцевые и сплошные пластины с соответствующими работе элемента крайними условиями, что позволяет аналитически оценить

прогибы и определить минимальную толщину элементов. Расчет шпильки и тела болта выполнен методами строительной механики.

Геометрические параметры конструкции, определённые по разработанной методике расчёта узла объединения, верифицированы численным анализом методом конечных элементов и согласуются с известными закономерностями поведения полимерных композиционных материалов при местном сжатии.

**Ключевые слова:** полимерные композиционные материалы; гибридные пролетные строения; соединительное устройство; упор пролетного строения; мосты из полимерно-композитных материалов; проблемы применения композитов; пролетное строение из полимерных композиционных материалов; расчетное обоснование; моделирование методом конечных элементов; методика

### Введение

В первой части исследования выполнено численное обоснование принципиальной схемы узла объединения монолитной железобетонной плиты проезжей части с главной балкой гибридного пролетного строения (ПС) из полимерного композиционного материала (ПКМ). Применение традиционных конструктивных решений, заимствованных из практики проектирования сталежелезобетонных пролетных строений, не обеспечивает требуемых физико-механических характеристик узла объединения при использовании ПКМ вследствие анизотропии и низкой прочности связующего при сжатии поперек волокон. Несущая способность упора в таких конструкциях в значительной степени определяется напряженно-деформированным состоянием (НДС) в зоне контакта шайб и головки болта с верхним листом главной балки.

Численное моделирование, выполненное в первой части, позволило обосновать целесообразность применения модифицированных шайб, снижающих и выравнивающих изополя напряжений в верхних слоях композита от предварительного натяжения высокопрочного болта.

Вместе с тем результаты моделирования требуют аналитического подтверждения и формализации в виде расчетной методики, пригодной для инженерного применения.

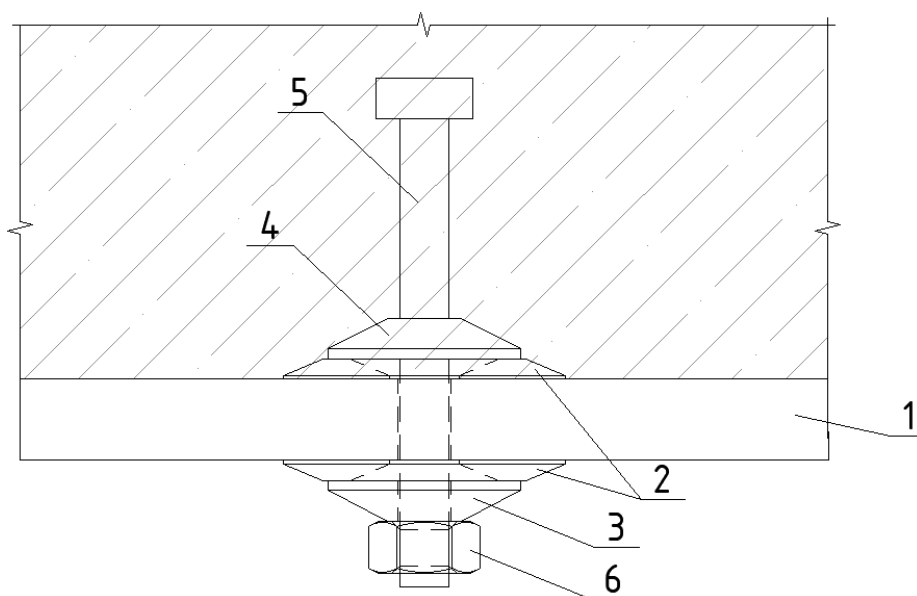


Рисунок 1. Конструкция узла объединения (разработано автором)

Целью исследования является разработка и обоснование аналитической методики расчета элементов узла объединения гибридного пролетного строения моста, а также обоснование его геометрических параметров.

С учетом ранее полученных результатов и выводов была разработана конструкция узла объединения [1], в дальнейшем именуемая упором, представленная на рисунке (рис. 1).

Упор содержит две внутренние шайбы (2), внешнюю шайбу (3), высокопрочный болт (4), гайку (6), шпильку (5).

Совместная работа всех элементов (2, 3, 4, 5, 6) обеспечивает равномерное распределение вертикальных и горизонтальных нагрузок на полимерно-композитный верхний лист главной балки (1).

Монтаж упора не требует высокой точности при разметке мест нахождения отверстий в полимерно-композитном листе, а благодаря конструкции шайб полимерно-композитный лист воспринимает сдвигающие усилия и усилия сжатия от предварительного натяжения болта без разрушения.

### Шпилька (5)

Фактическое распределение сдвигающих усилий от бетона по поверхности шпильки носит сложный характер, описывается в ряде работ [2–4].

В сталежелезобетонных конструкциях при действии сдвигающих усилий максимальные напряжения возникают в зоне крепления шпильки к главной балке и имеют нелинейное распределение по её высоте. Разрушение узла объединения может произойти по разным формам (смятие/выкол бетона, разрушение/отрыв шпильки). Задачей исследования является полная передача усилий сдвига и отрыва от плиты проезда на композит, которые способна испытывать стальная шпилька без своего собственного разрушения. В связи с этим детальное моделирование распределения усилий по высоте шпильки не является необходимым и принимается упрощенный подход, при котором анализируются предельные силовые факторы, возникающие в основании шпильки. Рассматриваемая расчетная схема приведена на рисунке (рис. 2).

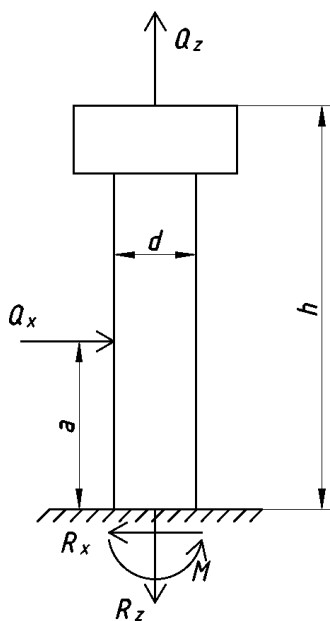


Рисунок 2. Расчетная схема шпильки (5) (разработано автором)

Сдвигающая сила в основании шпильки:

$$R_x = Q_x, \quad (1)$$

где:

$Q_x$  — равнодействующая сдвигающих сил от монолитной плиты ездового полотна.

Изгибающий момент, возникающий в шпильке в месте ее закрепления, определяется выражением:

$$M = Q_x a. \quad (2)$$

Целесообразно ограничиться рассмотрением предельных случаев приложения нагрузки, отражающих возможные границы изменения изгибающего момента.

Рассматриваются два предельных случая приложения нагрузки:

1. Равнодействующая сдвигающих усилий бетона  $Q_x$  смещена к основанию упора, т. е.  $a = 0$ .
2. Сдвигающие усилия равномерно распределены по высоте упора, равнодействующая приложена на высоте  $a = h/2$ .

Таким образом, искомый изгибающий момент изменяется в пределах:

$$a \in \left[0; \frac{h}{2}\right] \rightarrow M \in \left[0; Q_x \frac{h}{2}\right]. \quad (3)$$

Отрывающее усилие определяется выражением:

$$R_z = Q_z. \quad (4)$$

При дальнейшем расчёте предполагается одновременное воздействие на основание максимальных силовых факторов  $R_x$ ,  $R_z$ ,  $M$ . Такой подход основан на принципе учёта наиболее невыгодного сочетания нагрузок, при котором соответствующие усилия достигают своих предельных значений одновременно.

Это может не соответствовать реальной схеме распределения нагрузок, но в целях обеспечения надёжности такой метод допустим к применению, поскольку приводит к завышенной (консервативной) оценке напряжений в элементах конструкции.

### **Внешняя шайба (3)**

Рассмотрим внешнюю шайбу (3), находящуюся под действием нагрузки, передаваемой через гайку (6). Расчетная схема показана на рисунке (рис. 3). Предполагается, что давление от гайки распределяется равномерно по внутренней окружности кольца радиусом  $r_1$ . Внешняя шайба наружным краем опирается на внутреннюю нижнюю шайбу (2).

Расчёт внешней шайбы проводится на основе теории изгиба круглых и кольцевых пластин при осесимметричном нагружении [5–9].

При расчете используется допущение по отношению к реальной работе конструкции, заключающееся в том, что в принятой расчетной схеме на границе внутреннего радиуса ( $r = r_1$ ) действует равномерно распределенная нагрузка  $q$  от гайки (6) перпендикулярно поверхности шайбы. В действительности нагрузка распределяется по площади соприкосновения внешней шайбы и гайки, однако данное допущение идет в запас прочности.

Радиус  $r_2$  внешней шайбы (3) определяется размерами внутренней шайбы (2) и в рамках данного расчета считается заданным, искомым параметром является толщина  $\delta$ .

Основное дифференциальное уравнение симметричного изгиба круглой пластины имеет вид [5; 9]:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q(r)}{D}, \quad (5)$$

где:

$r$  — расстояние от оси симметрии до исследуемого окружного сечения в продольном сечении пластины;

$Q(r)$  — функция поперечной силы;

$D$  — цилиндрическая жёсткость пластины, вычисляется по формуле [5]:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6)$$

здесь:

$E$  — модуль упругости материала пластины;

$\nu$  — коэффициент Пуассона;

$\delta$  — толщина пластины.

Функция углов поворота определяется выражением:

$$\frac{dw}{dr} = \theta(r) = \frac{1}{r} \int \left( r \int \frac{Q}{D} dr \right) dr + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (7)$$

Функция прогибов определяется выражением:

$$w(r) = \int \left( \frac{1}{r} \int \left( r \int \frac{Q}{D} dr \right) dr \right) dr + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln(r) + C_3. \quad (8)$$

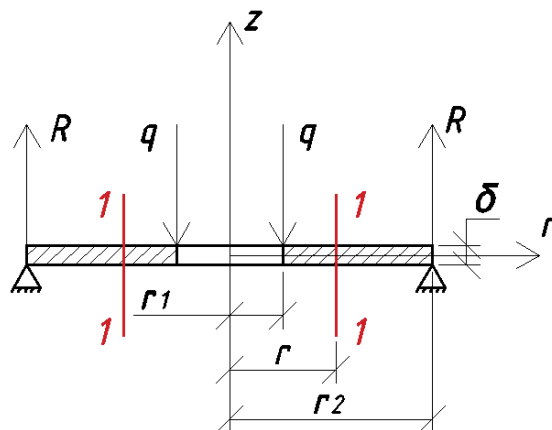


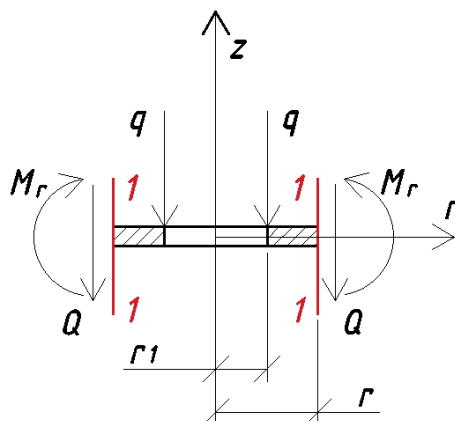
Рисунок 3. Расчетная схема внешней шайбы (разработано автором)

Рассматривая расчетную схему (рис. 3), запишем уравнение равновесия пластины на ось  $z$ :

$$\sum F_z = R * 2\pi r_2 - q * 2\pi r_1 = 0. \quad (9)$$

Из (9) получим выражение для опорных реакций  $R$ :

$$R = q \frac{r_1}{r_2}. \quad (10)$$



**Рисунок 4.** Отсеченная цилиндрическим сечением 1-1 часть пластины (разработано автором)

Вырезая центральную часть пластины секущим цилиндром 1-1 радиусом  $r$  (рис. 4), запишем уравнение равновесия на ось  $z$  для отсеченной части:

$$\sum F_z = -q * 2\pi r_1 - Q * 2\pi r = 0. \quad (11)$$

Из (11) находится функция поперечной силы в пластине:

$$Q(r) = -q \frac{r_1}{r}. \quad (12)$$

Учитывая (12), выражение углов поворота нормалей (7) после преобразований примет вид:

$$\frac{dw}{dr} = \theta(r) = -\frac{qr_1}{2D} \left( r \ln(r) - \frac{r}{2} \right) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (13)$$

Интегрируя по  $r$  (13), получим выражение для функции прогибов:

$$w(r) = -\frac{qr_1}{4D} r^2 (\ln(r) - 1) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln(r) + C_3. \quad (14)$$

Известно, что радиальный  $M_r$  и окружной  $M_\theta$  изгибающие моменты определяются уравнениями [5]:

$$M_r(r) = D \left( \frac{d\theta}{dr} + \nu \frac{\theta}{r} \right). \quad (15)$$

$$M_\theta(r) = D \left( \nu \frac{d\theta}{dr} + \frac{\theta}{r} \right). \quad (16)$$

Вычислим производную от функции углов поворота (14):

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{qr_1}{2D} \left( \ln(r) + \frac{1}{2} \right) + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}. \quad (17)$$

Учитывая (17), после серии математических преобразований (15) примет вид:

$$M_r(r) = -\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r) + \frac{1 - \nu}{2} \right] + C_1 \frac{D(1 + \nu)}{2} + C_2 \frac{D(\nu - 1)}{r^2}. \quad (18)$$

(16) с учетом (17) после упрощения примет вид:

$$M_\theta(r) = -\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r) - \frac{1 - \nu}{2} \right] + C_1 \frac{D(1 + \nu)}{2} + C_2 \frac{D(1 - \nu)}{r^2}. \quad (19)$$

Для определения коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$  используют краевые условия. Краевые условия формулируются следующим образом:

1. На внутреннем свободном крае ( $r = r_1$ ) функция радиального момента  $M_r(r_1) = 0$ . Тогда уравнение (14) примет вид:

$$-\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r_1) + \frac{1 - \nu}{2} \right] + C_1 \frac{D(1 + \nu)}{2} + C_2 \frac{D(\nu - 1)}{r_1^2} = 0. \quad (20)$$

2. На внешнем шарнирно-опертом крае ( $r = r_2$ ) радиальные моменты  $M_r(r_2) = 0$ .

$$-\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r_2) + \frac{1 - \nu}{2} \right] + C_1 \frac{D(1 + \nu)}{2} + C_2 \frac{D(\nu - 1)}{r_2^2} = 0. \quad (21)$$

3. На внешнем шарнирно-опертом крае ( $r=r_2$ ) функция прогибов (14) принимает значение  $w(r) = 0$ :

$$-\frac{qr_1}{4D} r_2^2 (\ln(r_2) - 1) + C_1 \frac{r_2^2}{4} + C_2 \ln(r_2) + C_3 = 0. \quad (22)$$

Представим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (20)-(22) в матричной форме:

$$A\vec{X} = \vec{P}, \quad (23)$$

где:

$A$  — матрица коэффициентов системы;

$X$  — вектор неизвестных;

$P$  — вектор свободных членов.

Общее решение СЛАУ методом обратной матрицы запишется в следующем виде:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\vec{P}, \quad (24)$$

где:

$A^{-1}$  — матрица, обратная к матрице  $A$ .

Для удобства матрица коэффициентов при неизвестных представлена в табличной форме (табл. 1). Решение СЛАУ вручную требует значительных временных затрат, поэтому для нахождения коэффициентов целесообразно использовать расчетные программные комплексы.

**Таблица 1**

**Матрица коэффициентов СЛАУ**

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Вектор нагрузки $\vec{P}$
1.	$\frac{D(1 + \nu)}{2}$	$\frac{D(\nu - 1)}{r_1^2}$	0	$\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r_1) + \frac{1 - \nu}{2} \right]$
2.	$\frac{D(1 + \nu)}{2}$	$\frac{D(\nu - 1)}{r_2^2}$	0	$\frac{qr_1}{2} \left[ (1 + \nu) \ln(r_2) + \frac{1 - \nu}{2} \right]$
3.	$\frac{r_2^2}{4}$	$\ln(r_2)$	1	$\frac{qr_1}{4D} r_2^2 (\ln(r_2) - 1)$

Составлено автором

Наибольшие радиальные и окружные нормальные напряжения возникают в верхнем и нижнем слоях пластины и вычисляются по формулам:

$$\sigma_r^{max} = \frac{6M_r}{\delta^2}. \quad (25)$$

$$\sigma_\theta^{max} = \frac{6M_\theta}{\delta^2}. \quad (26)$$

Эквивалентное напряжение в верхних и нижних слоях пластины с учетом (25) и (26) вычисляется по энергетической гипотезе прочности:

$$\sigma_{экр} = \frac{6}{\delta^2} \sqrt{[(\sigma_r)^2 + (\sigma_\theta)^2 - \sigma_r \sigma_\theta]}. \quad (27)$$

Условие прочности по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{экр}^{max} \leq [\sigma]. \quad (28)$$

Условие жесткости по допускаемым прогибам:

$$w^{max} \leq [w]. \quad (29)$$

Жесткость шайбы является определяющим фактором в рассматриваемой задаче, так как она влияет на натяжение высокопрочного болта и на общую жесткость конструкции упора. В этой связи условие (29) приобретает ключевое значение при оценке работоспособности системы.

При расчете на жесткость критерием допустимой деформативности шайбы будет выполнение условия:

$$\frac{w}{R} \leq \frac{1}{100} \div \frac{1}{200}. \quad (30)$$

Из (30) при заданном значении R получаем  $w^{max}$ :

$$w^{max} \leq \frac{R}{100} \div \frac{R}{200}. \quad (31)$$

Пример зависимости получаемых прогибов от толщины пластины при фиксированных  $r_1$  и  $r_2$  показан на рисунке (рис. 5).

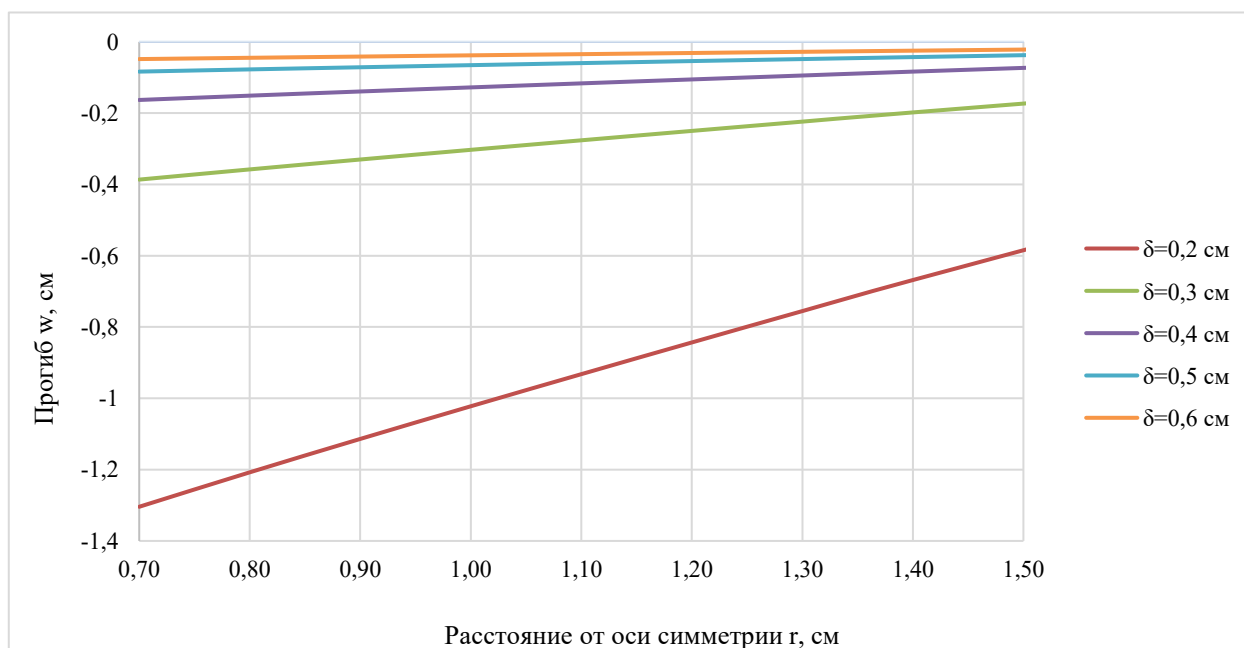


Рисунок 5. Прогибы внешней шайбы при различных толщинах  $\delta$  (разработано автором)

#### Головка болта (4)

Для полимерных композиционных материалов (ПКМ) характерна ограниченная несущая способность при сжатии поперёк волокон, определяемая в первую очередь свойствами связующего. При использовании болтовых соединений с предварительным натяжением излишне высокий момент затяжки способен приводить к смятию материала поперёк волокон и к более резкому разрушению соединения [10], но также известно, что в допустимых пределах высокий момент затяжки увеличивает несущую способность соединения при растяжении, а его варьирование способно изменять механизмы разрушения композита [11].

Работоспособность болтофрикционного соединения определяется не только площадью контакта шайбы с композитом, ее формой и усилием натяжения, но и схемой опирания головки болта на шайбу.

Таким образом, существует необходимость в разработке болта с геометрией, позволяющей передавать прижимное усилие в места опирания на специальной шайбе (2). При расчете следует также учитывать изгибающий момент, передающийся от шпильки на конструкцию объединения.

Таким образом, головка болта (4) воспринимает изгибающий момент, сдвигающую и отрывающие силы от шпильки (5), а также передает усилие предварительного натяжения от тела болта на внутреннюю шайбу (2).

Радиус  $r_2$  головки болта (2), также как и для внешней шайбы (3), определяется размерами внутренней шайбы (2) и в рамках данного расчета считается заданным, искомым параметром является толщина  $\delta$ .

Окончательные прогибы определяются методом суперпозиции с учетом действия всех силовых факторов.

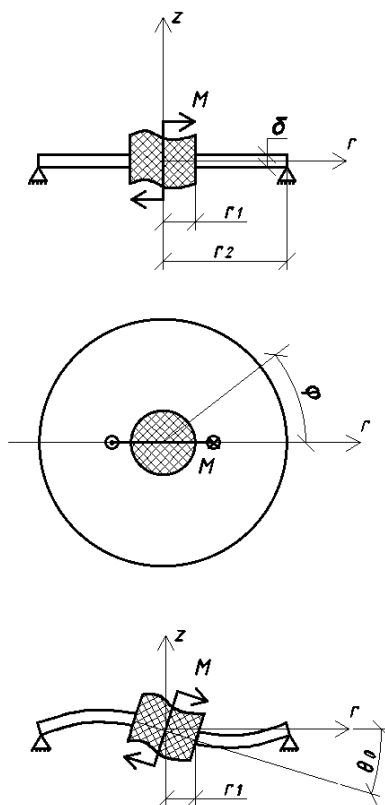


Рисунок 6. Расчетная схема головки болта при действии изгибающего момента от шпильки (разработано автором)

Основным уравнением теории изгиба несимметричных круглых и кольцевых пластин является дифференциальное уравнение Софи Жермен-Лагранжа в полярных координатах, имеющее вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{q(r, \varphi)}{D}; \quad (32)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$w = w^o + w^*, \quad (33)$$

где:

$w^o$  — общее решение однородного дифференциального уравнения  $\Delta^2 w = 0$ ;

$w^*$  — частное решение неоднородного дифференциального уравнения  $\Delta^2 w = -\frac{q}{D}$ .

Поскольку  $q = 0$ , то дифференциальное уравнение является однородным:

$$w = w^o. \quad (34)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения Клебша:

$$w^o = F_o(r) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(r) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(r) \sin m\varphi, \quad (35)$$

где осесимметричная составляющая решения:

$$F_o(r) = C_{10} + C_{20} r^2 + C_{30} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + C_{40} r^2 \ln\left(\frac{r}{r_2}\right). \quad (36)$$

При  $m = 2, 3, 4, \dots$  функция  $F_m(r)$  имеет вид:

$$F_m(r) = C_{1m} r^m + C_{2m} r^{-m} + C_{3m} r^{m+2} + C_{4m} r^{-m+2}. \quad (37)$$

При  $m = 1$ :

$$F_m(r) = F_1(r) = C_{1m} r^m + C_{2m} r^{-m} + C_{3m} r^{m+2} + C_{4m} r \ln\left(\frac{r}{r_2}\right). \quad (38)$$

Т. к. отсутствует осесимметричная составляющая нагрузки, то

$$F_o(r) = 0. \quad (39)$$

Прогибы будут симметричны относительно плоскости  $\varphi = 0$ , поэтому

$$f_m(r) = 0. \quad (40)$$

Учитывая (36)–(40), выражение (35) примет вид:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(r) \cos m\varphi, \quad (41)$$

где:

$m = 1, 3, 5, \dots$ ,

( $m \neq 2, 4, 6, 8, \dots$ , т. к. прогибы кососимметричны относительно плоскости  $\varphi = 90^\circ$ ).

Удержим только первый член ряда  $m = 1$ :

$$w = F_1(r) \cos \varphi. \quad (42)$$

$$w(r, \varphi) = \left( C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + C_3 r^3 + C_4 r \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right) \cos(\varphi). \quad (43)$$

Вычислим частные производные функции (43):

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left( C_1 - C_2 \frac{1}{r^2} + 3C_3 r^2 + C_4 \left( \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) + r_2 \right) \right) * \cos(\varphi). \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \left( C_2 \frac{2}{r^3} + 6C_3 r + C_4 \frac{r_2}{r} \right) * \cos(\varphi). \quad (45)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = - \left( C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + C_3 r^3 + C_4 r \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) \right) \sin(\varphi). \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = - \left( C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + C_3 r^3 + C_4 r \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) \right) \cos(\varphi). \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = - \left( C_1 - C_2 \frac{1}{r^2} + 3C_3 r^2 + C_4 \left( \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) + r_2 \right) \right) \sin(\varphi). \quad (48)$$

Радиальный изгибающий момент рассчитывается по формуле:

$$M_r(r, \varphi) = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (49)$$

Учитывая (44)–(48), (49) примет вид:

$$M_r(r, \varphi) = D \cos(\varphi) \left[ \left( \frac{2(1 - \nu)}{r^3} \right) C_2 + C_3 r (6 + 2\nu) + C_4 \frac{r_2}{r} (1 + \nu) \right]. \quad (50)$$

Окружной изгибающий момент рассчитывается по формуле:

$$M_\varphi(r, \varphi) = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]. \quad (51)$$

Учитывая (44)–(48), (51) примет вид:

$$M_\varphi(r, \varphi) = D \cos(\varphi) \left[ \frac{2(\nu - 1)}{r^3} C_2 + 2r(1 + 3\nu)C_3 + \frac{(1 + \nu)}{r} C_4 \right]. \quad (52)$$

Крутящий момент:

$$M_{r\varphi}(r, \varphi) = D(1 - \nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right]. \quad (53)$$

Учитывая (44)–(48), (53) примет вид:

$$M_{r\varphi}(r, \varphi) = D(1 - \nu) \sin(\varphi) \left[ \frac{2}{r^3} C_2 - 2rC_3 - \frac{1}{r} C_4 \right]. \quad (54)$$

Запишем краевые условия:

1. На внутреннем крае  $r = r_1$ ,  $w = -r_1 \theta_0 \cos(\varphi)$ :

$$C_1 r_1 + C_2 \frac{1}{r_1} + C_3 r_1^3 + C_4 r_1 \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + r_1 \theta_0 = 0. \quad (55)$$

2. На внутреннем крае  $r = r_1$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r} = -\theta_0 \cos(\varphi)$ :

$$C_1 - C_2 \frac{1}{r_1^2} + C_3 3r_1^2 + C_4 \left( \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + 1 \right) + \theta_0 = 0. \quad (56)$$

3. На внешнем крае  $r = r_2$ ,  $w = 0$ :

$$C_1 r_2 + C_2 \frac{1}{r_2} + C_3 r_2^3 = 0. \quad (57)$$

4. На внешнем крае  $r = r_2$ ,  $M_r(r_2) = 0$ :

$$\left(\frac{2(1-\nu)}{r_2^3}\right)C_2 + C_3r_2(6+2\nu) + C_4\frac{(1+\nu)}{r_2} = 0. \quad (58)$$

Найдем решение СЛАУ методом обратной матрицы аналогично (23) и составим таблицу коэффициентов (табл. 2):

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\vec{P}, \quad (59)$$

где:

$A^{-1}$  — матрица, обратная к матрице  $A$ .

Таблица 2

Матрица коэффициентов СЛАУ

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	Вектор нагрузки $\vec{P}$
1.	$r_1$	$\frac{1}{r_1}$	$r_1^3$	$r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$	$-r_1\theta_0$
2.	$1$	$-\frac{1}{r_1^2}$	$3r_1^2$	$\left(\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + 1\right)$	$-\theta_0$
3.	$r_2$	$\frac{1}{r_2}$	$r_2^3$	$0$	$0$
4.	$0$	$\frac{2(1-\nu)}{r_2^3}$	$r_2(6+2\nu)$	$\frac{(1+\nu)}{r_2}$	$0$

Разработано автором

Поперечная сила  $Q_r$ :

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (60)$$

Учитывая (44)–(48), выражение для поперечной силы (60) примет вид:

$$Q_r = D \left[ 8C_3 - 2C_4 \frac{1}{r^2} \right] \cos(\varphi). \quad (61)$$

Поперечная сила  $Q_\varphi$ :

$$Q_\varphi = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right]. \quad (62)$$

После преобразований (62) примет вид:

$$Q_\varphi = D \left[ 8C_3 + 2C_4 \frac{1}{r^2} \right] \sin(\varphi). \quad (63)$$

Определим связь между внешним моментом  $M$  и углом поворота жесткого центра  $\theta_0$ . Рассмотрим вырезанный из пластины жесткий центр радиусом  $r_1$  (рис. 7) и запишем уравнение равновесия относительно  $oY$ .

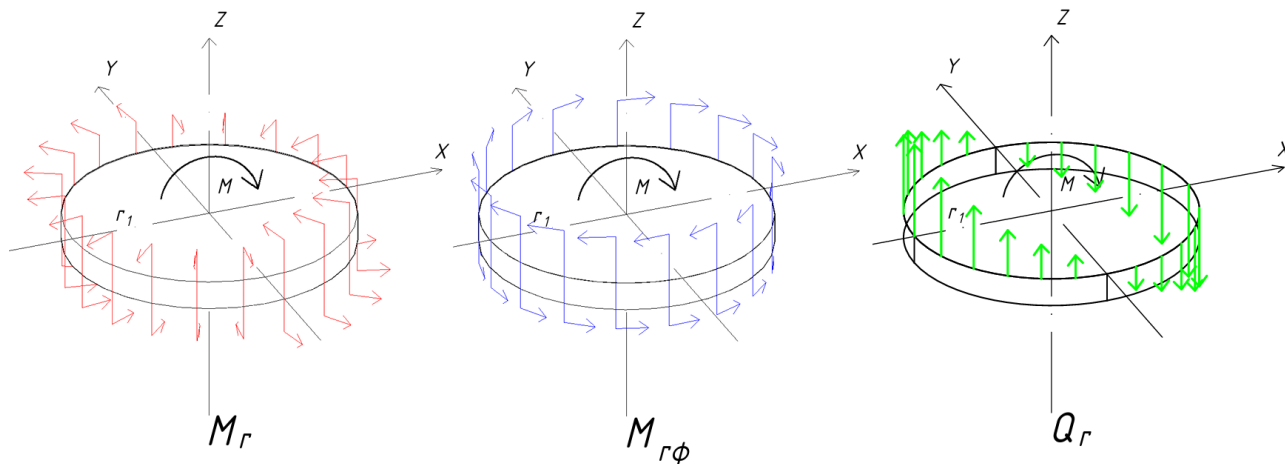
$$\sum m_y = -M + \int_0^{2\pi} M_r r_1 d\varphi \cos \varphi - \int_0^{2\pi} M_{r\varphi} r_1 d\varphi \sin \varphi - \int_0^{2\pi} Q_r r_1 d\varphi r_1 \cos \varphi = 0. \quad (64)$$

После ряда математических преобразований получим:

$$M = 4\pi DC_4. \quad (65)$$

$\theta_0$  линейно зависит от  $M$ :

$$\theta_0 = kM. \quad (66)$$



**Рисунок 7.** Вырезанный из пластины жесткий центр со схематичным отображением действующих силовых факторов (разработано автором)

СЛАУ (55)–(58) решается дважды:

1. При  $\bar{\theta}_0 = 1$ . Находятся коэффициенты  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4$  и  $\bar{M}$ , вычисляется коэффициент пропорциональности  $k$ .
2. Зная коэффициент  $k$  в выражении (66), рассчитываются действительные  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Распределенная опорная реакция  $V_r$ :

$$V_r = -\left(Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r}\right). \quad (67)$$

После преобразований (67) примет вид:

$$V_r = -D \cos(\varphi) \left( \frac{2(1-\nu)}{r_2^4} C_2 + (6+2\nu)C_3 - \frac{(3-\nu)}{r_2^2} C_4 \right). \quad (68)$$

Суммарная вертикальная реакция при  $x > 0$ :

$$P_{доб}^B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_r(\varphi) r_2 d\varphi. \quad (69)$$

Вычислив определенный интеграл (69), получим добавочную вертикальную силу на внутреннюю шайбу от изгибающего момента:

$$P_{доб}^S = -2Dr_2 \left( \frac{2(1-\nu)}{r_2^4} C_2 + (6+2\nu)C_3 - \frac{(3-\nu)}{r_2^2} C_4 \right). \quad (70)$$

Имея значение добавочной вертикальной силы от изгибающего момента, вычисляется окончательная площадь поверхности под внутренней шайбой.

### Внутренние шайбы (2)

Внутренние шайбы (2) воспринимают и передают напряжения с внешней шайбы (3) и головки болта (4) на верхний композиционный лист главной балки (1).

Внутренняя шайба (2) выполнена из металла, её большее (внутреннее) основание лежит на композиционном материале, а меньшее (внешнее) соприкасается с головкой болта (4) и внешней шайбой (3).

Как видно из рисунка (рис. 7), опорная реакция  $Q_r$ , возникающая от действия изгибающего момента, неравномерно распределена по пластине, что, в свою очередь, влечет неравномерное распределение опорных реакций под поверхностью внутренней шайбы (2).

Для оценки НДС в зоне сопряжения элементов узла была разработана расчетная модель в программном комплексе SolidWorks (рис. 8). В целях ускорения расчетов гайка была исключена из расчетной модели и заменена парой сил предварительного натяжения, действующих на тело болта (4) и внешнюю шайбу (3) (рис. 9).

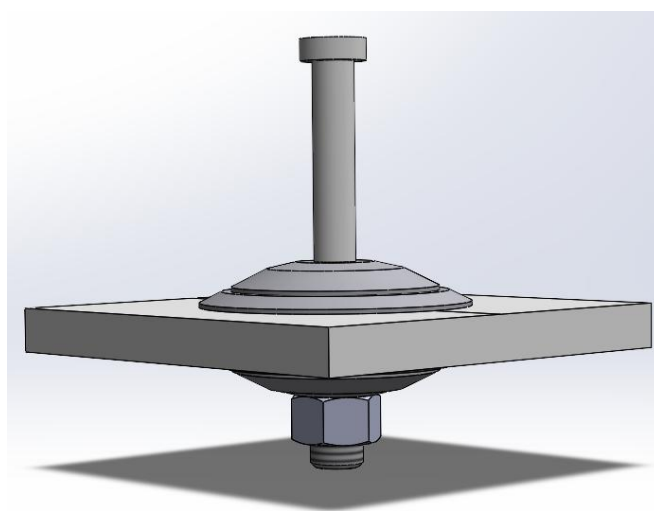


Рисунок 8. Общий вид 3D-модели (разработано автором)

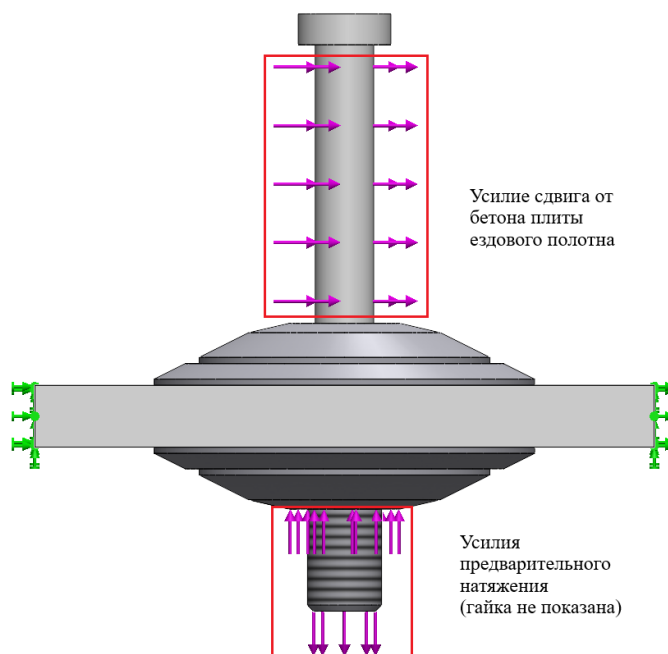
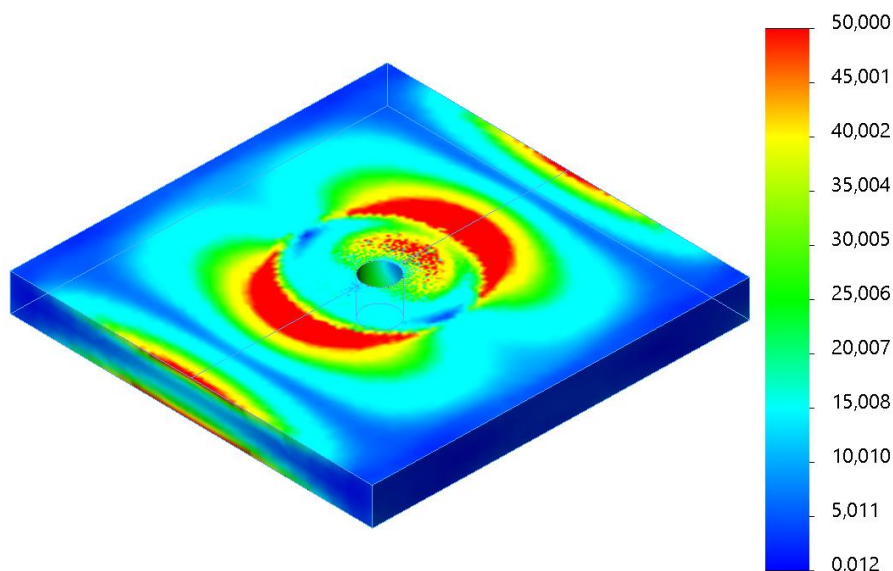


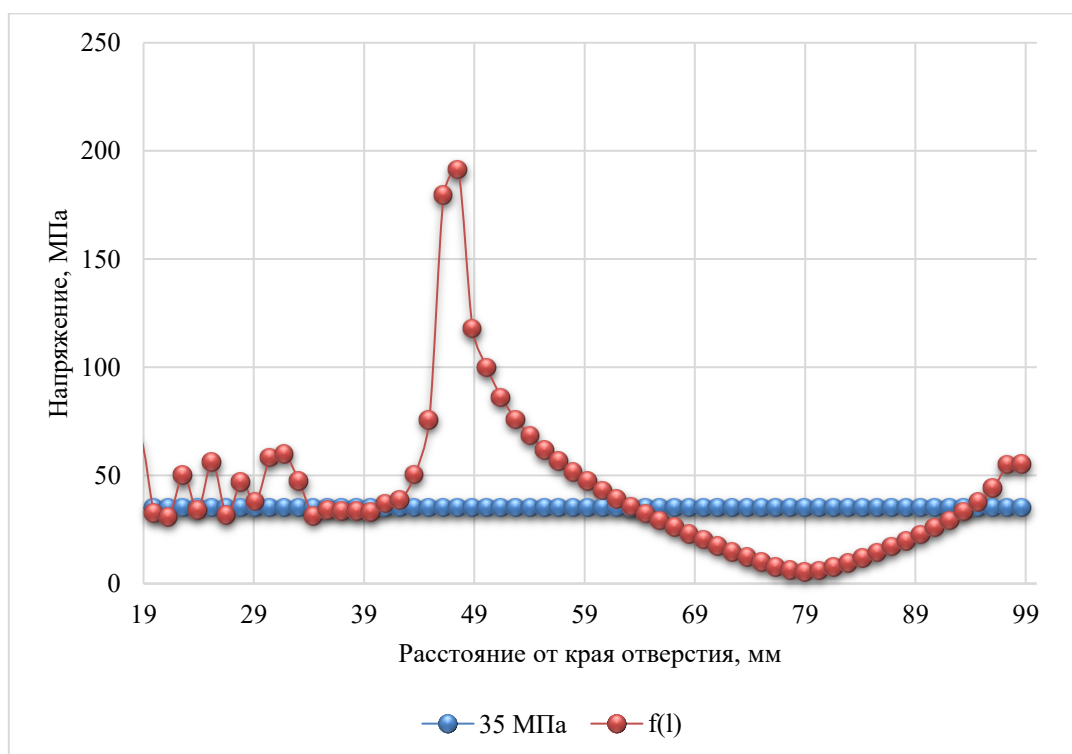
Рисунок 9. Расчетная модель узла в программе SolidWorks (разработано автором)

Численное моделирование методом конечных элементов позволило установить характер распределения напряжений в композитном материале (рис. 10).



*Рисунок 10. Изополя напряжений (в МПа) в композитном материале от взаимодействия с конструкцией упора (разработано автором)*

При анализе НДС композита учет локальных максимумов контактных напряжений под поверхностями внутренних шайб (2) нецелесообразен ввиду чувствительности результатов к постановке контактной задачи, построению сетки конечных элементов и зависимости от толщины самих внутренних шайб, в связи с чем для анализа принимаются осреднённые по наиболее нагруженной половине контактной поверхности нормальные усилия [12], что математически нашло отражение в определенном интеграле выражения (69).



*Рисунок 11. Эпюра напряжений в среднем сечении в верхнем слое ПКМ вдоль оси приложения нагрузки (разработано автором)*

Известно, что композиты с болтовым соединением также могут демонстрировать развитие удалённых от отверстия форм разрушения, в том числе непосредственно за наружной кромкой шайбы [13], что согласуется с наличием максимумов напряжений в верхних слоях ПКМ, возникающих сразу за границей внутренних шайб (рис. 11).

Запишем условие прочности композиционного материала от нормального давления:

$$\frac{N}{A} \leq R_p^n, \quad (71)$$

где:

$R_p^n$  — расчетное сопротивление композита на сжатие поперек волокон;

$A$  — площадь давления под шайбой;

$N$  — усилие сжатия.

Рассмотрим наиболее нагруженную половину верхней внутренней шайбы.

$$N = \frac{P_p - S_{ab}}{2} + P_{\text{дооб}}^e, \quad (72)$$

где:

$P_p$  — усилие предварительного натяжения болта;

$S_{ab}$  — отрывающее усилие на концевых участках балки;

$P_{\text{дооб}}^e$  — добавочная вертикальная сила на внутреннюю шайбу от изгибающего момента согласно (70).

$$A = \frac{S_{w,min}^e}{2}. \quad (73)$$

Площадь верхней шайбы из условия прочности композиционного материала на сжатие поперек волокон:

$$S_{w,min}^e = \frac{P_p + 2P_{\text{дооб}}^e - S_{ab}}{R_p^n}. \quad (74)$$

Поскольку учет отрывающих усилий  $S_{ab}$  уменьшает площадь верхней шайбы и не всегда имеет место в реальной работе конструкции, примем  $S_{ab} = 0$ , тогда выражение (74) примет вид:

$$S_{w,min}^e = \frac{P_p + 2P_{\text{дооб}}^e}{R_p^n}. \quad (75)$$

Площадь нижней шайбы из условия прочности композиционного материала на сжатие поперек волокон:

$$S_{w,min}^n = \frac{P_p + 2P_{\text{дооб}}^n + S_{ab}}{R_p^n}. \quad (76)$$

Запишем условие восприятия сдвига композиционным материалом:

$$F_{mp} \geq S_h. \quad (77)$$

$F_{mp}$  — сила трения между поверхностями стальных шайб и композиционным материалом;

$S_h$  — сдвигающее усилие согласно приложения Я СП 35.133330.2011.<sup>1</sup>

$$F_{mp} = \mu N; \quad (78)$$

<sup>1</sup> СП 35.13330.2011 «СНиП 2.05.03-84\* Мосты и трубы».

где:

$\mu$  — коэффициент трения между ПКМ и сталью;

$N$  — сила нормального давления на композит.

$$N = AR_p^n. \quad (79)$$

$A$  — полная площадь контакта верхней и нижней внутренних шайб с композитом.

$$A = S_w^{полн} = S_{w,min}^h + S_{w,min}^g. \quad (80)$$

Таким образом, выражение (77) с учетом (78)–(80) примет вид:

$$S_w^{полн} \geq \frac{S_h}{\mu R_p^n}; \quad (81)$$

Площадь поверхности внутренней шайбы, соприкасающейся с композитом, вычисляется по формуле:

$$S_w = \pi \left( \frac{D_w^2 - d_w^2}{4} \right), \quad (82)$$

где:

$D_w$  — внешний диаметр шайбы, см;

$d_w$  — внутренний диаметр шайбы, см.

Внутренний диаметр шайбы определяется, как

$$d_w = d_\delta + \delta_\delta, \quad (83)$$

где:

$d_\delta$  — диаметр тела болта (4), см;

$\delta_\delta$  — добавка, определяемая из технологических соображений, см.

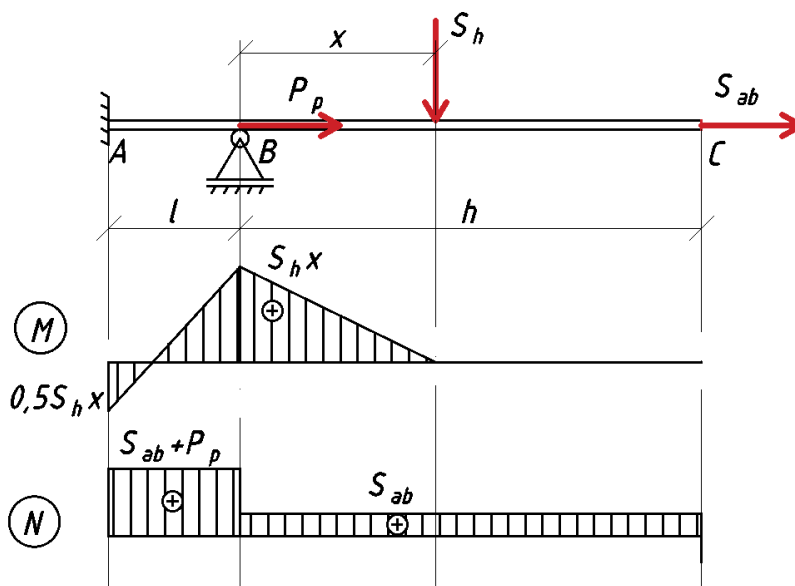
Тогда внешний диаметр внутренних шайб (2) с учетом изложенного определяется выражением:

$$D_w = \sqrt{\frac{4S_w}{\pi} + (d_\delta + \delta_\delta)^2}. \quad (84)$$

#### **Тело болта (4)**

Рассмотрим расчетную схему (рис. 12). Участок стержня АВ — тело болта (4), участок ВС — тело шпильки. Точка А соответствует месту расположения гайки, в точке В находится головка болта. Принятая расчетная схема с шарнирным опиранием не соответствует реальной работе конструкции, однако это допущение идет в запас прочности тела болта, поскольку допускает передачу момента от шпильки на тело болта, который в действительности будет частично передаваться от шпильки через головку болта на верхнюю внутреннюю шайбу.

Для рассматриваемой конструкции отношение длины участка АВ к диаметру болта составляет  $L/d = 3 \div 4$ , что соответствует короткому и сравнительно толстому стержню, для которого при наличии поперечной силы вклад усилий сдвига может быть существенным и требующим учета в соответствии с теорией изгиба балок Тимошенко [14]. В настоящем расчёте тело болта моделируется по Эйлеру-Бернулли с целью упрощения, поскольку расчёт прогибов и углов поворота не требуется.



**Рисунок 12.** Расчетная схема для расчета тела болта (разработано автором)

Анализируя эпюры  $M$  и  $N$  (рис. 12), закономерно получаем расположение опасного сечения непосредственно в точке соединения тела болта с головкой. Запишем условие прочности тела стального болта (4):

$$\frac{M}{W} + \frac{N}{A} \leq [\sigma_{дон}]. \quad (85)$$

Усилие растяжения под головкой болта:

$$N = S_{ab} + P_p. \quad (86)$$

Изгибающий момент под головкой болта:

$$M = S_h \frac{h}{2}. \quad (87)$$

Площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi d_6^2}{4}, \quad (88)$$

где:

$d_6$  — номинальный диаметр тела болта.

Момент сопротивления круглого сечения:

$$W = \frac{\pi d_6^3}{32}. \quad (89)$$

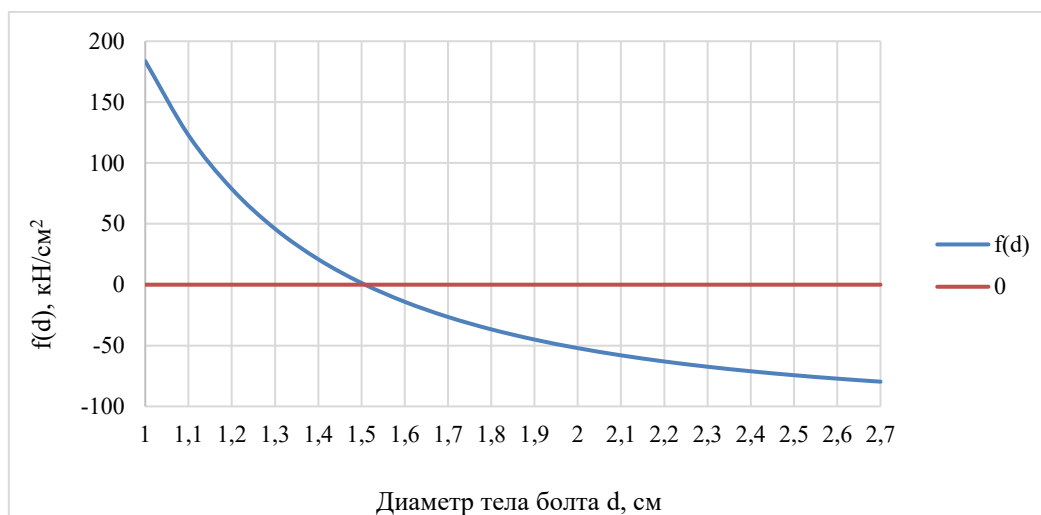
Изгибающий момент в идеальных условиях должен быть полностью воспринят композиционным материалом через верхнюю внутреннюю шайбу и головку болта. Поскольку реальные прогибы композиционного материала под внутренней шайбой зависят от свойств ПКМ в поперечном направлении и трудно поддаются анализу, с целью упрощения вводится коэффициент  $m_m$ , учитывающий частичную передачу изгибающего момента на тело болта. Таким образом, определяющее условие прочности (85) окончательно примет вид:

$$\frac{16S_h h m_m}{\pi d_6^3} + \frac{4(S_{ab} + P_p)}{\pi d_6^2} \leq R_y. \quad (90)$$

Запишем выражение (90) в виде функции  $f(d)$ .

$$f(d) = \frac{16S_h h m_m}{\pi d_{\sigma}^3} + \frac{4(S_{ab} + P_p)}{\pi d_{\sigma}^2} - R_y. \quad (91)$$

Поскольку (91) — это кубическая функция, точное значение искать не требуется, возможно решать задачу графически. На рисунке (рис. 13) приведен пример графика зависимости  $f(d)$  для шпильки диаметром  $d_{ш} = 13$  мм. Анализируя график на адекватном интервале находим минимальный диаметр болта  $d_{\sigma}$  при  $f(d) = 0$ . Для данного примера оптимально принять  $d_{\sigma} = 16$  мм.



**Рисунок 13.** Пример графика зависимости  $f(d)$  (разработано автором)

С учетом принятых расчетных предпосылок и допущений, а также полученных аналитических зависимостей далее формулируется методика расчета объединения в совместную работу композиционной балки пролетного строения и монолитной плиты ездового полотна автодорожных мостов.

### Методика расчета

1. Согласно п. 9.28 — п. 9.30 СП 35.13330.2011 определяется длина концевой участка  $a_e$ , сдвигающее усилие по шву объединения железобетонной плиты и композитной конструкции  $S_i$ , а также концевое отрывающее усилие  $S_{ab}$ .
2. Зная  $S_i$  и  $S_{ab}$ , а также несущую способность на сдвиг одной шпильки  $S_h$ , рассчитываемую по приложению Я СП 35.13330.2011, определяется необходимое количество упоров  $n$ , их расположение на пролетном строении, диаметр шпильки  $d_{ш}$  и высота  $h_{ш}$ .
3. Рассчитывается дополнительное сжимающее усилие  $P_{\sigma\sigma}^g$ , возникающее от действия изгибающего момента:

$$P_{\sigma\sigma}^g = -2Dr_2 \left( \frac{2(1-\nu)}{r_2^4} C_2 + (6+2\nu)C_3 - \frac{(3-\nu)}{r_2^2} C_4 \right). \quad (92)$$

4. Определяется минимальное требуемое усилие предварительного натяжения болта из условия сохранения сжатия между верхней внутренней шайбой и композитным листом:

$$P_p = m_p (P_{\sigma\sigma}^g + S_{ab}). \quad (93)$$

5. Через решение кубического уравнения находится диаметр тела болта:

$$f(d) = \frac{16S_h h m_m}{\pi d_\delta^3} + \frac{4(S_{ab} + P_p)}{\pi d_\delta^2} - R_y = 0. \quad (94)$$

6. Рассчитывается минимально допустимый диаметр внутренней верхней шайбы по формуле:

$$D_w^e = \sqrt{\frac{4S_{w,min}^e}{\pi} + (d_\delta + \delta_\delta)^2}, \quad (95)$$

где

$$S_{w,min}^e = \frac{P_p + 2P_{\delta\delta}^e}{R_p^n}. \quad (96)$$

7. Из условия (97) подбирается радиус головки болта  $r_2$ . С учетом уточненного  $r_2$  повторно выполняются п. 3–6 настоящей методики, что будет изменять  $D_w^e$ . Эти действия необходимо повторять до момента, пока условие (97) не будет выполнено.

$$\frac{D_w^e}{2} \geq r_2; \quad (97)$$

8. Определяется дополнительное сжимающее усилие  $P_{\delta\delta}^H$ :

$$P_{\delta\delta}^H = -2Dr_2 \left( \frac{2(1-\nu)}{r_2^4} C_2 + (6+2\nu)C_3 - \frac{(3-\nu)}{r_2^2} C_4 \right). \quad (89)$$

9. Рассчитывается диаметр внутренней нижней шайбы:

$$D_w^H = \sqrt{\frac{4S_{w,min}^H}{\pi} + (d_\delta + \delta_\delta)^2}, \quad (99)$$

где

$$S_{w,min}^H = \frac{P_p + 2P_{\delta\delta}^H + S_{ab}}{R_p^n}. \quad (100)$$

Выбирается максимальное значение из  $S_{w,min}^B$ , определенной в (96) и  $S_{w,min}^H$ , определенной в (100). Для обеих шайб в целях повышения технологичности принимается максимальное значение диаметра.

10. Выполняется проверка по восприятию сдвигающих сил контактными поверхностями.

$$S_w^{полн} \geq \frac{S_h}{\mu R_p^n}, \quad (101)$$

где

$$S_w^{полн} = S_{w,min}^H + S_{w,min}^e. \quad (102)$$

11. Рассчитывается толщина внешней нижней шайбы. Толщины внешней нижней шайбы и головки болта принимаются одинаковыми из технологических соображений.

Толщина рассчитывается исходя из условия допускаемых прогибов  $[w]$  при наиболее невыгодном совместном воздействии силовых факторов:

$$w_n(r) + w_m(r, \varphi) \leq [w], \quad (103)$$

где

$$w_n(r) = -\frac{qr_1}{4D}r^2(\ln(r) - 1) + C_1\frac{r^2}{4} + C_2\ln(r) + C_3; \quad (104)$$

$$w_m(r, \varphi) = \left(C_1r + C_2\frac{1}{r} + C_3r^3 + C_4r\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right)\cos(\varphi). \quad (105)$$

Учитывая количество параметров и сложность используемых аналитических зависимостей, выполнение расчётов в ручном режиме является трудоёмким. В связи с этим расчёт был автоматизирован при помощи разработанной программы для ЭВМ, реализующей предложенную методику и обеспечивающей её удобное прикладное применение при проектировании элементов узла объединения.

В качестве примера приводится сводная таблица основных геометрических параметров конструкции для различных диаметров шпилек, рассчитанной по предлагаемой методике для ПКМ с расчётным пределом прочности на сжатие поперек волокон 34,9 МПа.

Таблица 1

**Сводная таблица основных геометрических параметров элементов узла объединения**

Диаметр шпильки $d_{ш}$ , см	Усилие сдвига $S_h$ , кН	Диаметр болта $d_b$ , см	Толщина головки болта $\delta$ , см	Диаметр головки болта $D$ , см	Диаметр внутренних шайб $D_w$ , см	Площадь внутренней шайбы $S_w$ , см <sup>2</sup>	Отношение усилия сдвига к площади, занимаемой 1 упором $S_h/S_w$ , кН/см <sup>2</sup>
1,3	26,99	1,8	0,70	4,70	7,80	60,84	0,444
1,6	40,88	2,2	0,80	5,40	9,10	82,81	0,494
1,9	57,65	2,4	1,00	6,20	10,30	106,09	0,543
2,2	77,29	2,7	1,10	7,00	11,50	132,25	0,584
2,4	91,98	3,0	1,30	7,60	12,20	148,84	0,618

Разработано автором

**Границы применимости**

Разработанная методика расчёта объединения в совместную работу композиционной главной балки и монолитной плиты ездового полотна применима при выполнении следующих условий:

Методика предполагает использование тяжелых бетонов в плите проезжей части, не допускающих хрупкого разрушения бетона в основании шпильки. Разрушение узла объединения должно происходить через пластическую деформацию металла шпильки и последующий её отрыв по металлу без разрушения композита или с разрушением, но при условии достижения расчетных нагрузок на упор.

Отношение длины шпильки к ее диаметру должно удовлетворять условию  $l/d \geq 4,2$  [15], а соединение с головкой болта должно исключать отрыв шпильки от болта.

Главные балки пролетного строения должны быть выполнены из полимерного композиционного материала. Главная балка должна содержать в своей конструкции верхний горизонтальный лист толщиной до 20 мм. Площадь поверхности листа должна быть достаточной для размещения расчетного количества упоров с учетом наличия стенок и ребер, в особенности в приопорной зоне, где действуют наибольшие сдвигающие и отрывающие усилия.

Методика не учитывает воздействие на конструкцию объединения динамических и циклических нагрузок, деградацию свойств ПКМ, стали и бетона во времени, влияние агрессивных сред, а также вопросы местной устойчивости верхнего листа главной балки.

Методика не предназначена для расчета узлов объединения с другими типами упоров, отличными от рассмотренных.

### Заключение

По итогам проведенной работы получены следующие результаты:

1. Разработана методика расчёта объединения в совместную работу композиционной главной балки и монолитной плиты ездового полотна автодорожных мостов.
2. Описана конструкция узла объединения, обеспечивающая передачу продольных сдвигающих и отрывающих усилий между плитой и композиционной балкой. При проектировании конструкции объединения учтены особенности свойств ПКМ.
3. Сформулированы границы применимости методики расчета.

Для подтверждения корректности разработанной методики необходимо проведение экспериментальных исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Патент на полезную модель № 240268 U1 Российская Федерация, МПК E01D 2/00. Упор: заявл. 04.07.2025: опубл. 29.12.2025 / С.В. Рыбаков, М.Н. Ерофеев; патентообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет транспорта". — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=88926451> (дата обращения: 06.10.2024). — EDN: [VRDOIN](#).
2. Ростовых, Г.Н. Совершенствование методики расчёта гибких упоров в конструкциях сталежелезобетонных мостов / Г.Н. Ростовых // Известия Петербургского университета путей сообщения. — 2007. — № 3(12). — С. 79–87. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11913797> (дата обращения: 06.10.2024). — EDN: [KASLPP](#).
3. Johnson R.P. Composite structures of steel and concrete: beams, slabs, columns, and frames for buildings / R.P. Johnson. — 3rd ed. — URL: <https://www.iqytechnicalcollege.com/BAE%20637-Composite%20Structure%20of%20Steel%20&%20Concrete.pdf> (дата обращения: 25.01.2026).
4. Characterization of the load-slip behaviour of headed stud shear connections in narrow profiled sheeting / V. Vigneri, C. Odenbreit, M. Schäfer [et al.] // ce/papers. — 2023. — Т. 6, № 1. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cepa.1908> (дата обращения: 24.01.2026). — DOI: [10.1002/cepa.1908](https://doi.org/10.1002/cepa.1908). — EDN: [YNJLMK](#).
5. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. В.И. Контговта; под ред. Г.С. Шапиро. — Изд. 3-е. — Москва: URSS, 2009. — 635 с. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19458517> (дата обращения: 25.01.2026). — ISBN: 978-5-397-00604-0. — EDN: [QJVBWZ](#).
6. Новые подходы к расчету на изгиб круглых и кольцевых пластин, а также вычисления их низших собственных частот / А.С. Кравчук, С.А. Томилин, А.И. Кравчук [и др.] // Глобальная ядерная безопасность. — 2021. — № 1(38). — С. 44–56. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=45635223> (дата обращения: 25.01.2026). — DOI: [10.26583/gns-2021-01-05](https://doi.org/10.26583/gns-2021-01-05). — EDN: [MBDPQV](#).

7. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. — Москва: Наука, 1982. — 567 с. — URL: <https://search.rsl.ru/record/01001125855?ysclid=mnxcyzz5ot383498335> (дата обращения: 25.01.2026).
8. Грач, С.А. Расчет круглых пластин: В 2 ч. / С.А. Грач. — Фрунзе: Мектеп, 1979. — URL: <https://search.rsl.ru/record/01007585133> (дата обращения: 25.01.2026).
9. Вайнберг, Д.В. Расчет пластин / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. — 2-е изд., перераб. и доп. — Киев: Будівельник, 1970. — 435 с. — URL: <https://search.rsl.ru/record/01007291465> (дата обращения: 25.01.2026).
10. Володин, В.А. Технологические особенности изготовления крепежных систем для соединения композиционных материалов / В.А. Володин, В.А. Братухин // Труды НГТУ имени Р.Е. Алексеева. — 2017. — № 2(117). — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29771877> (дата обращения: 18.01.2026). — EDN: [ZBMYJX](https://elibrary.ru/item.asp?id=29771877).
11. Effect of Washer Type on Bearing Strength of Bolted-Joint Laminated Composites. — URL: [https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/096369351202100603?utm\\_source=researchgate.net&utm\\_medium=article](https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/096369351202100603?utm_source=researchgate.net&utm_medium=article) (дата обращения: 18.01.2026).
12. Пыринов, Б.В. Совершенствование конструктивных решений узловых соединений для конструкций из полимерных композиционных материалов / Б.В. Пыринов, А.Н. Яшнов, А.Н. Иванов // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. — 2012. — № 28. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21089718> (дата обращения: 17.02.2025). — EDN: [RTNEBZ](https://elibrary.ru/item.asp?id=21089718).
13. Crews J.H., Naik V.A. Failure Analysis of a Graphite/Epoxy Laminate subjected to Bolt Bearing Loads / J.H. Crews, V.A. Naik. — NASA Technical Memorandum 86297. — August 1984. — URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19840024366/downloads/19840024366.pdf> (дата обращения: 03.02.2026).
14. Тимошенко, С.П. Соппротивление материалов. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С.П. Тимошенко. — Москва: Наука, 1965. — 364 с. — URL: <https://search.rsl.ru/record/01005599978> (дата обращения: 03.02.2026).
15. Driscoll G.C.J., Slutter R.G., Laboratory F.E. Research on composite design at Lehigh University / G.C.J. Driscoll, R.G. Slutter, F.E. Laboratory. — Lehigh University, 1961. — (Proc. AISC, National Engineering Conference; Reprint No. 180 (61-8)). — URL: <https://preserve.lehigh.edu/lehigh-scholarship/faculty-and-staff-publications/fritz-lab-reports/research-composite-design> (дата обращения: 28.02.2025).

**Rybakov Sergey Viktorovich**

Russian University of Transport, Moscow, Russia

E-mail: [Rybakov.sv@bk.ru](mailto:Rybakov.sv@bk.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0810-7994>

RSCI: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=1178306](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1178306)

## Computational justification for the design of a hybrid bridge superstructure. Part 2

**Abstract.** This article presents the second part of a design study for a connection between a monolithic reinforced concrete slab and the main beam of a polymer composite superstructure.

The aim of the study is to develop and validate an analytical method for calculating the elements of a connection between a hybrid bridge superstructure and its geometric parameters. The proposed method should ensure connection strength under known shear and shear forces acting on the stud.

The solution to this problem yields analytical relationships linking the forces transmitted from the deck slab to the main beam, the ultimate strength of the polymer composite material, and the geometric parameters of the connection. This allows the method to be applied in the engineering design of connection between hybrid bridge structures.

The calculation of the outer washer and bolt head is performed within the framework of the principles of bending theory for solid and annular plates. The choice of this mathematical framework is based on the nature of the loading of the washers and bolt head, which operate primarily in bending when the pre-tensioning force is transmitted through the contact surfaces. The outer washer and bolt head are treated as elastic annular and solid plates with boundary conditions appropriate to the element's operation, allowing for analytical evaluation of deflections and determination of the minimum element thickness. The stud and bolt shank were calculated using structural mechanics methods.

The geometric parameters of the structure, determined using the developed joint calculation method, were verified by numerical analysis using the finite element method and are consistent with known behavior patterns of polymer composite materials under localized compression.

**Keywords:** polymer composite materials; hybrid superstructures; connecting device; superstructure abutment; bridges made of polymer-composite materials; problems of composite application; superstructure made of polymer composite materials; calculation justification; finite element modeling; methodology