

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» <https://t-s.today>

Russian journal of transport engineering

2019, №4, Том 6 / 2019, No 4, Vol 6 <https://t-s.today/issue-4-2019.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/11SATS419.pdf>

DOI: 10.15862/11SATS419 (<http://dx.doi.org/10.15862/11SATS419>)

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Круглов В.М., Ерофеев В.Т., Ватин Н.И., Аль Дулайми Салман Давуд Салман Вариант деформационной теории пластичности бетона в плоском напряжённом состоянии // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2019 №4, <https://t-s.today/PDF/11SATS419.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/11SATS419

**For citation:**

Kruglov V.M., Erofeev V.T., Vatin N.I., Al-Dulaimi Salman Dawood Salman (2019). Version of the deformation theory of plastic ductility of concrete in a plane stress state. *Russian journal of transport engineering*, [online] 4(6). Available at: <https://t-s.today/PDF/11SATS419.pdf> (in Russian). DOI: 10.15862/11SATS419

УДК 691.32:539.52

**Круглов Валерий Михайлович**

ФГБАУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия  
Профессор  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [tu@miit.ru](mailto:tu@miit.ru)

**Ерофеев Владимир Трофимович**

ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева», Саранск, Россия  
Декан «Архитектурно-строительного» факультета  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [ira.erofeeva.90@mail.ru](mailto:ira.erofeeva.90@mail.ru)

**Ватин Николай Иванович**

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет имени Петра Великого», Санкт-Петербург, Россия  
Профессор  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [vatin\\_ni@spbstu.ru](mailto:vatin_ni@spbstu.ru)

**Аль Дулайми Салман Давуд Салман**

Министерство высшего образования и научных исследований, Багдад, Ирак  
Соискатель  
E-mail: [vatin\\_ni@spbstu.ru](mailto:vatin_ni@spbstu.ru)

## Вариант деформационной теории пластичности бетона в плоском напряжённом состоянии

**Аннотация.** Железобетон как один из основных материалов для широкого класса строительных конструкций гражданского, промышленного и транспортного назначения обладает рядом специфических свойств: физическая нелинейность, анизотропия, трещинообразование. Поведение железобетона в упругопластической стадии до его разрушения в большей степени характеризуется деформированием бетона. Показано, что физическая нелинейность бетона обусловлена пластическими деформациями, которые характерны для различных видов напряженного состояния. Для трёхосного напряжённого состояния система уравнений в механике деформируемого твёрдого тела включает две группы формул, которые объединяют девять уравнений, в которые входят 15 неизвестных (три

перемещения, шесть компонент деформаций и шесть компонент напряжений). Для того, чтобы система оказалась замкнутой, необходимо дополнить её шестью уравнениями. Такими уравнениями являются основные физические соотношения, которые связывают шесть компонент напряжений с шестью компонентами деформаций. Использование линейных зависимостей между напряжениями и деформациями вносит наибольшую погрешность в оценку напряжённо-деформированного состояния (НДС) конструкций, изготовленных из материалов, обладающих свойствами нелинейно деформируемых тел. В этой связи, чем правильнее отражают определяющие соотношения физический закон, по которому материал сопротивляется различным видам деформаций, тем меньшая погрешность будет допущена в оценке НДС конструкций. В статье предложен новый подход к построению основных физических соотношений, основанный на инвариантном решении задач механики деформируемого твёрдого тела для бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии. Показано соответствие предлагаемых зависимостей реальному напряжённому и деформируемому состоянию материала.

**Ключевые слова:** бетон; железобетон; пластичность; деформационная теория; напряжённое состояние

Железобетон как один из основных материалов для широкого класса строительных конструкций гражданского, промышленного и транспортного назначения обладает рядом специфических свойств: физическая нелинейность, анизотропия, трещинообразование. Для изготовления железобетонных конструкций используются бетоны различных видов (высокопрочные, самоуплотняющиеся, порошково-активированные и т. д.), обладающие разнообразными физико-механическими свойствами [1–8]. Поведение железобетона в упругопластической стадии до его разрушения в большей степени характеризуется деформированием бетона. Именно гипотезы и предпосылки, заложенные в математическую модель бетона, определяют точность и надёжность результатов расчётов при использовании даже самых универсальных аппаратов механики деформируемого твёрдого тела.

Физическая нелинейность бетона обусловлена пластическими деформациями, которые характерны для всех возможных видов напряжённого состояния.

Для трёхосного напряжённого состояния система уравнений в механике деформируемого твёрдого тела включает две группы формул [9–11]. Первая группа три уравнения равновесия сил бесконечно малого объёма. Вторая группа из шести уравнений (уравнения Коши) отражает связь между перемещениями и деформациями в рассматриваемом объёме. Таким образом, эти группы объединяют девять уравнений, в которые входят 15 неизвестных (три перемещения, шесть компонент деформаций и шесть компонент напряжений). Для того, чтобы система оказалась замкнутой, необходимо дополнить её шестью уравнениями. Такими уравнениями являются основные физические соотношения, которые связывают шесть компонент напряжений с шестью компонентами деформаций. Первые девять уравнений являются математически строгими [11]. Ошибка, вызванная их линеаризацией [11] возникает лишь при больших перемещениях, что не является характерным для большинства строительных конструкций.

Использование линейных зависимостей между напряжениями и деформациями вносит наибольшую погрешность [11] в оценку напряжённо-деформированного состояния (НДС) конструкций, изготовленных из материалов, обладающих свойствами нелинейно деформируемых тел. В этой связи, чем правильнее отражают определяющие соотношения физический закон, по которому материал сопротивляется различным видам деформаций, тем меньшая погрешность будет допущена в оценке НДС конструкций.

Зависимости между напряжениями и деформациями, отражающие процесс нагружения должны строиться так, чтобы предельные величины напряжений, определяемые этими зависимостями, принадлежали предельной поверхности прочного сопротивления бетона, а также учитывали развитие в нём упруго-пластических деформаций.

Исходя из общих подходов к построению предельной поверхности (критерия прочности) бетона [12] используются три инвариантные величины тензора напряжений:  $I_1(D_\sigma)$ ,  $J_2(D_\sigma)$  и  $J_3(D_\sigma)$ . Первый инвариант связан со средним нормальным напряжением  $\sigma_0$  на октаэдрической площадке, равнонаклонённой к направлениям главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$I_1(D_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 \quad (1)$$

С девиатором напряжений  $J_2(D_\sigma)$  связывается касательное напряжение  $\tau_0$ , действующее на той же октаэдрической площадке:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2(D_\sigma)} \quad (2)$$

Известно, что  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  являются инвариантами, не зависящими от ориентации площадки, и остаются неизменными при повороте осей координат. С геометрической точки зрения величина  $\sigma_0$  определяет положение девиаторной плоскости, которая перпендикулярна к оси  $\sigma_0$ , а октаэдрическое касательное напряжение  $\tau_0$  – величину радиуса-вектора, лежащего в этой плоскости. Расположение на октаэдрической площадке характеризует параметр Лоде-Надаи  $\mu_\sigma$ , который определяет вид напряжённого состояния. При совпадении положения радиуса-вектора  $\tau_0$  с проекциями осей  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  на девиаторную плоскость параметр Лоде-Надаи  $\mu_\sigma$  изменяет своё значение в пределах  $60^\circ$  от +1 до -1.

Если оценивать положение радиуса-вектора  $\tau_0$  на октаэдрической площадке углом по отношению к проекциям осей  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  на эту площадку, то следует, что угол изменяется от  $0^\circ$  при  $\mu_\sigma = +1$  до  $60^\circ$  при  $\mu_\sigma = -1$ . Введём  $\Psi_\sigma$  – угол вида напряжённого состояния [13], так, чтобы  $\Psi_\sigma = 0^\circ$  при  $\mu_\sigma = 0$ . Несложно показать, что параметр  $\mu_\sigma$  связан с величиной  $\Psi_\sigma$  соотношением

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{tg} \Psi_\sigma \quad (3)$$

Учитывая границы изменения параметра Лоде-Надаи в пределах  $-1 \leq \mu_\sigma \leq +1$ , величина  $\Psi_\sigma$  будет изменяться в диапазоне  $-\pi/6 \leq \Psi_\sigma \leq \pi/6$

Величина  $\Psi_\sigma$  может быть определена из выражения [13]

$$\sin 3\Psi_\sigma = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3(D_\sigma)}{\sqrt{[J_2(D_\sigma)]^3}} \quad (4)$$

где  $J_3(D_\sigma)$  – третий инвариант девиатора напряжений.

Для плоского напряжённого состояния формула (4) преобразуется к виду

$$\sin 3\Psi_\sigma = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{J_2(D_\sigma)}} \left[ 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{J_2(D_\sigma)}} \right] \quad (5)$$

Учитывая (2) выражение (5) будет представлено следующим образом:

$$\sin 3\Psi_\sigma = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_0}{\tau_0} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\tau_0} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Как видно из (6), в плоском напряжённом состоянии достаточно иметь два инварианта  $\sigma_0$  и  $\tau_0$ . При этом в качестве параметра, характеризующего вид напряжённого состояния,

целесообразнее применять не угол  $\Psi_\sigma$ , а отношение  $\xi = \sigma_0/\tau_0$ . С этим отношением удобнее работать, так как для каждого вида напряжённого состояния оно сохраняет постоянное значение, а именно: при одноосном растяжении  $\xi = \sqrt{2/2}$ , чистом сдвиге  $\xi = 0$ , одноосном сжатии  $\xi = -\sqrt{2/2}$ . Пределы изменения величины  $\xi$  составляют от  $\sqrt{2}$  при равномерном двухосном растяжении до  $-\sqrt{2}$  при равномерном двухосном сжатии. При этом компоненты главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , выраженные через параметр  $\xi$  и, например, через параметр  $\tau_0$  можно определить по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_0 (\sqrt{3}\xi \pm \sqrt{2 - \xi^2}) \quad (7)$$

Деформационные зависимости бетона для различных видов напряжённого состояния являются нелинейными. Отличаются они по уровню развития упруго-пластических деформаций. Это явление характеризуется коэффициентом Лоде-Надаи по деформациям  $\mu_\varepsilon$ . Можно показать, что в силу малых деформаций для плоского напряжённого состояния в поперечном направлении ими можно пренебречь. Тогда параметром аналогичным  $\frac{\sigma_0}{\tau_0}$  для оценки упруго-пластического сопротивления бетона служит соотношение  $\xi = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0}$ . Здесь,  $\varepsilon_0$  – октаэдрическая нормальная (средняя) деформация;  $\gamma_0$  – октаэдрическая деформация сдвига.

В случае линейно-упругого будет выполняться условие:

$$3K_0 \zeta (G_0 \xi)^{-1} = 1 \quad (8)$$

где  $K_0$  – начальный объёмный модуль упругости;

$G_0$  – начальный модуль сдвига.

Это условие соответствует основному закону в классической механике деформируемого твёрдого тела [9] – закону пропорциональности девиатора напряжений девиатору деформаций в упругом трёхмерном пространстве:

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = 2 \frac{\tau_0}{\gamma_0} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0) \quad (9)$$

где  $ij = 11, 22, 33, 12, 13, 23$ ;

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ );

$\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;

$\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций.

Для плоского напряжённого состояния оно определяет коллинеарность векторов  $\tau_0$  и  $\gamma_0$  при отсутствии деформаций или их чрезвычайной малости в третьем направлении (ортогональном к плоскости).

Наличие же третьей компоненты деформаций  $\varepsilon_{33}$  приводит к плоскому обобщённо-деформированному состоянию и может оказаться решающим в развитии пластических деформаций, нарушении сплошности и разрушении бетона при двухосном сжатии (точнее, при величинах  $\sigma_0 < 0$ ) плоских железобетонных конструкций. В области растягивающих напряжений и чистого сдвига  $\sigma_0 \geq 0$  величиной нормальной деформации  $\varepsilon_{33}$  в силу её незначительности (по сравнению с областью сжатия по крайней мере на порядок) можно пренебречь. Очевидно, что появление третьей нормальной деформации приведёт к нарушению условия (3), так как между векторами  $\tau_0$  и  $\gamma_0$  возникнет угол  $\omega$  (сдвиг фаз), определяемый разностью углов вида напряжённого состояния  $\Psi_\sigma$  и углом вида деформированного состояния

$\Psi_\varepsilon$ . При этом для простого нагружения отношение  $\xi = \sigma_0/\varepsilon_0$  постоянно, а величина  $\zeta = \varepsilon_0/\gamma_0$  является переменной. Тем не менее, для плоского напряжённого состояния мерой отклонения векторов  $\tau_0$  и  $\gamma_0$  друг от друга в девиаторной плоскости (неколлинеарности векторов) будет служить отношение  $(\varepsilon_0/\gamma_0)((\xi G_0)/(3K_0))^{-1} \neq 1$  или некоторое обобщённое уравнение:

$$\eta = (\varepsilon_0/\gamma_0)((\xi G_0)/(3K_0))^{-1} = f(\xi, \sigma_{ij}) = f_1(\xi, \bar{\sigma}_0, \sigma_0) \quad (10)$$

Функция  $\eta$  характеризует не только сдвиг фаз между векторами  $\tau_0$  и  $\gamma_0$ , но и служит мерой развития пластических деформаций в материале. Введение функции (10) позволяет представить уравнения от  $(\varepsilon_0 \sim \sigma_0, \gamma_0 \sim \tau_0)$  [12] в виде:

$$\varepsilon_0 = \eta \psi \frac{\sigma_0}{3K_0}, \quad (11)$$

$$\gamma_0 = \psi \frac{\tau_0}{G_0}. \quad (12)$$

Здесь параметр  $\Psi$  определяет развитие пластических деформаций между девиаторными частями  $\tau_0$  и  $\gamma_0$ . Безусловно, его влияние вместе со сдвигом фаз сказывается и на объёмной деформации.

Тогда зависимости между напряжениями и деформациями могут быть рассчитаны по известным формулам закона Гука:

$$\varepsilon_{11} = (\sigma_{11} - \mu^* \sigma_{22})/E^*, \quad \varepsilon_{12} = (2(1 + \mu^*) \sigma_{12})/E^* \text{ и т. д.}, \quad (13)$$

где величины  $E^*$  и  $\mu^*$  являются переменными упругими параметрами и определяются по формулам

$$E^* = \frac{3E_0}{\psi(\eta(1-2\mu_0)+2(1+\mu_0))}, \quad (14)$$

$$\mu^* = \frac{1-\eta(1-2\mu_0)/(1+\mu_0)}{2+\eta(1-2\mu_0)/(1+\mu_0)} \quad (15)$$

Задачи деформационной теории пластичности бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии, сводятся к последовательному решению линейных задач с переменными параметрами упругости  $E^*$  и  $\mu^*$ .

При необходимости определения компоненты  $\varepsilon_{33}$  можно воспользоваться выражением

$$\varepsilon_{33} = \frac{(1 - \mu_0)\eta - (1 + \mu_0)}{3\varepsilon_0} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (16)$$

В случае применения шаговых алгоритмов зависимости между приращениями компонент деформаций ( $\varepsilon_{ij}$ ) и приращениями компонент напряжений ( $\sigma_{ij}$ ) могут быть записаны в виде, подобном выражениям (8).

При этом упругие параметры, отвечающие каждому шагу нагружения, определяются по формулам:

$$\left\{ \begin{aligned} E_k^* &= \frac{3E_0(\eta'\psi + \psi'\eta)\psi'}{(1 - 2\mu_0)\psi'\varphi_1 + 2(1 + \mu_0)(\eta'\psi + \psi'\eta)\varphi_1} \\ \mu_k^* &= \frac{(1 - (1 - 2\mu_0)\psi'\varphi_1)[(\eta'\psi + \psi'\eta)\psi_1(1 + \mu_0)]^{-1}}{(2 + (1 - 2\mu_0)\psi'\varphi_1)[(\eta'\psi + \psi'\eta)\psi_1(1 + \mu_0)]^{-1}} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

В формулах (12)  $\varphi_1$  и  $\Psi_1$  – параметры, учитывающие погрешность шаговой линеаризации для законов  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  и  $\tau_0 - \gamma_0$ .



Выбор уравнений для функций  $\Psi$  и  $\eta$ , характеризующих развитие нелинейных деформаций в бетоне, находящемся в условиях плоского напряжённого состояния, основывается на следующих гипотезах и предпосылках:

- относительное изменение объёма  $\varepsilon_0$  является непрерывной нелинейной функцией среднего напряжения  $\sigma_0$  и вида напряжённого состояния  $\xi$ ;
- сдвиг на октаэдрических площадках  $\gamma_0$  является непрерывной нелинейной функцией октаэдрического касательного напряжения  $\tau_0$  и вида напряжённого состояния  $\xi$ ;
- основные физические соотношения в начальной точке деформирования должны соответствовать формулам теории линейной упругости;
- обеспечивается возможность непосредственного перехода в предельном состоянии от кривых деформирования к условию прочности бетона.

Рассматривая развитие объёмных нелинейных деформаций (рис. 1а) в зависимости от относительного уровня  $\sigma_0^* = \sigma_0 \bar{\sigma}_0^{-1}$  (здесь  $\bar{\sigma}_0$  – предельное значение  $\bar{\sigma}_0^c$ ), параметра  $\xi$  для бетонов разной прочности (В20...В70), по данным экспериментальных исследований [12] можно выделить такие характерные отличия кривой  $\sigma_0 - \varepsilon_0$ . При низких уровнях  $\sigma_0^*$  ( $\sigma_0 < 0$ ) кривая близка к линейной зависимости. Для больших значений  $\sigma_0^*$  прослеживается существенная нелинейность, причём до уровня  $\sigma_0^* = k_T^0 = 0,7 \dots 0,8$  кривая выпукла, а выше него до  $\sigma_0^* = 1/k_T^v$  ( $k_T^v \geq 1$ ) вогнута. Можно считать, что вблизи  $\sigma_0^* = k_T^0 = 0,7 \dots 0,8$  находится точка образования микротрещин [14], а уровню  $\sigma_0^* = 1/k_T^v$  соответствует образование макротрещин. Этап деформирования, связанный с развитием дилатации бетонных образцов, позволяет отметить, что максимальное значение октаэдрическое нормальное напряжение достигает в точке пересечения кривой  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  и прямой  $\sigma_0 = 3K_0 \varepsilon_0$ . При напряжениях  $\sigma_0 > 0$  кривую  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  отличает слабая нелинейность. Для этой области характерным является совпадение границ микро- и макротрещино-образования.

Зависимостям  $\tau_0 - \gamma_0$  (рис. 1б) в области растягивающих напряжений и чистого сдвига ( $\sigma_0 \geq 0$ ) отвечает слабая нелинейность, а максимальным деформациям соответствует образование макротрещин. При значениях  $\sigma_0 < 0$  кривые  $\tau_0 - \gamma_0$  существенно нелинейны, а предельные деформации превышают деформации макротрещино-образования.

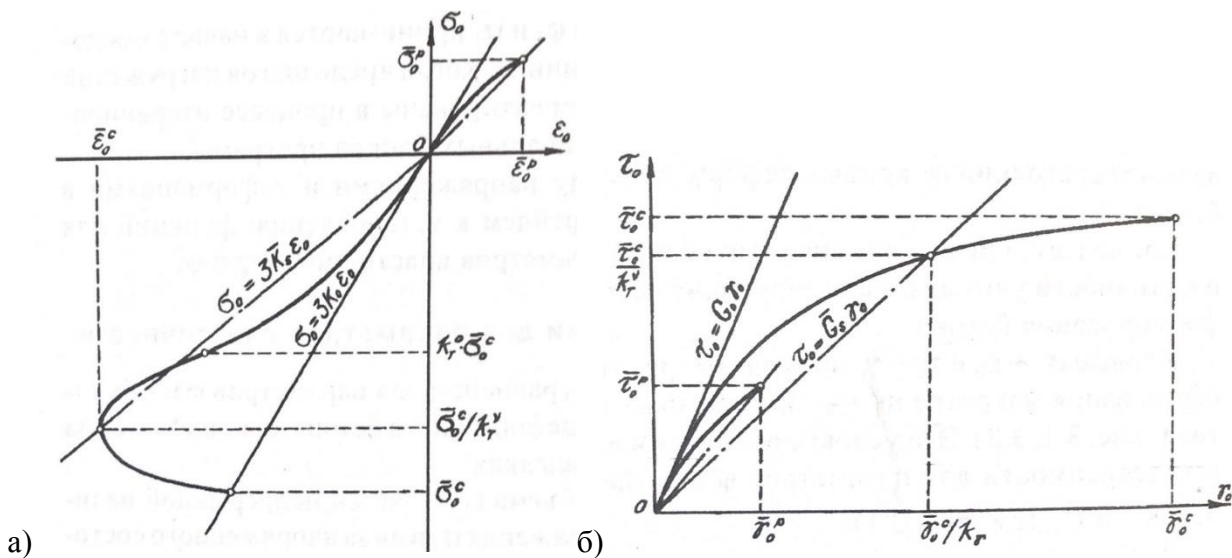


Рисунок 1. Общий вид зависимостей:  $\sigma_0 - \varepsilon_0 - (1a)$ ;  $\tau_0 - \gamma_0 - (1б)$

В качестве аналитического выражения параметра  $\eta$  примем функцию вида

$$\eta = 1 - (1 - \bar{\eta})(\sigma_0(\bar{\sigma}_0)^{-1})^k \tag{18}$$

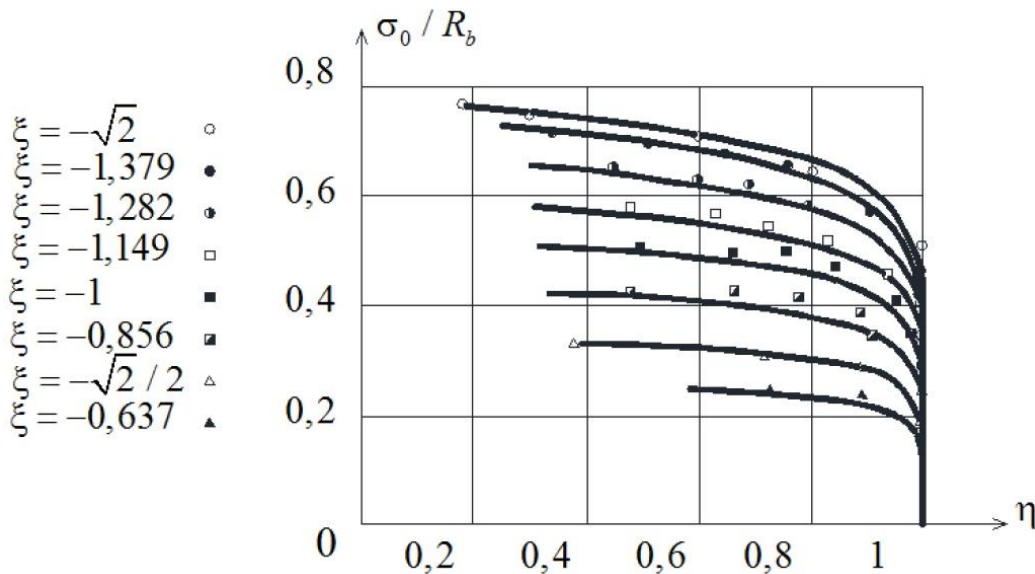
Постоянную  $k$  определим из предположения близости величины  $\eta$  к единице в области нижней границы микротрещинообразования, характеризуемой  $\sigma_0^* = k_T^0 = 0,7...0,8$  [13; 14]. Тогда имеем

$$K \approx -21/\xi \tag{19}$$

Значение  $\bar{\eta}$  можно определить по формуле

$$\bar{\eta} = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}R_b}{3G_0\bar{\gamma}_{0c}}\right) \left(\frac{3\bar{\tau}_0}{\sqrt{2}R_b}\right)^m \tag{20}$$

Теоретические кривые, полученные по выражению (8) и соответствующие различным значениям  $\xi$ , приведены на рис. 2. Здесь же изображены экспериментальные точки, полученные по опытным данным Х. Купфера.



**Рисунок 2.** Теоретические кривые функции  $\eta$  в сравнении с экспериментальными данными Х. Купера

В формуле (15) величина  $\bar{\gamma}_{0c}$  соответствует предельному сдвигу на октаэдрических площадках при одноосном сжатии, т. е. при  $\bar{\tau}_0(R_b)^{-1} = \sqrt{2}/3$ . Константа  $m$  может быть определена в предположении выполнения при двухосном сжатии условия

$$\bar{\gamma}_0 = -3\xi\bar{\tau}_0(R_b)^{-1}\bar{\gamma}_{0c} \tag{21}$$

Тогда, учитывая, что при двухосном равномерном сжатии  $\xi = -\sqrt{2}$ , а  $\bar{\tau}_0(R_b) = \sqrt{2}\bar{R}_{2c}(3R_b)^{-1}$ , получим

$$m = \ln \left( \left( \frac{3\sqrt{2}G_0\bar{\gamma}_{0c}}{R_b} - 1 \right) \left( \frac{3\sqrt{2}G_0\bar{\gamma}_{0c}}{R_b} - 2 \right)^{-1} \right) \left( \ln(R_{2c}(R_b)^{-1}) \right)^{-1} \tag{22}$$

В области растягивающих напряжений при  $\sigma_0 > 0$  значения  $\eta$  принимаются равными единице.

В проведённых исследованиях [12] показано, что для аналитического выражения функции пластичности  $\Psi$  в зависимости от инвариантов  $\tau_0 - \gamma_0$  целесообразно использовать модернизированную формулу В.В. Соколовского [12]. Тогда получим

$$\Psi = [1 + \tau_0^2(\bar{\gamma}_0^2 G_0^2)^{-1} - (\tau_0(\bar{\tau}_0)^{-1})^2]^{-0,5} \quad (23)$$

где  $\bar{\gamma}_0$  – сдвиг на октаэдрических площадках, отвечающий предельному значению октаэдрического напряжения ( $\bar{\tau}_0$ ).

Если учесть, что объёмные деформации в момент разрушения (при  $\sigma_0 > 0$ ) по опытам многих исследователей близки к значениям, то, введя величину  $\bar{\eta}$ , характеризующую значение функции (10) при предельном напряжении  $\bar{\sigma}_0$ , можно записать

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\tau}_0(G_0\bar{\eta})^{-1} \quad (24)$$

Окончательно аналитическое выражение (18) для параметра  $\Psi$ , характеризующего развитие неупругих деформаций в зависимости  $\tau_0 - \gamma_0$ , будет представлено в виде

$$\Psi = [1 + (\bar{\eta}^2 - 1)(\tau_0(\bar{\tau}_0))^2]^{-0,5} \quad (25)$$

Величины предельных октаэдрических деформаций  $\bar{\gamma}_0$ , входящие в уравнение (18), для определения  $\Psi$  в зонах «растяжение – сжатие» одноосного и двухосного сжатия определяются соотношением

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\bar{\gamma}_{0c}}{f(\xi)} \quad (26)$$

Теоретические кривые  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  и  $\tau_0 - \gamma_0$ , полученные по предложенному выше подходу, в сравнении с результатами экспериментальных исследований Х. Купфера [15–17] приведены на рис. 3–5.

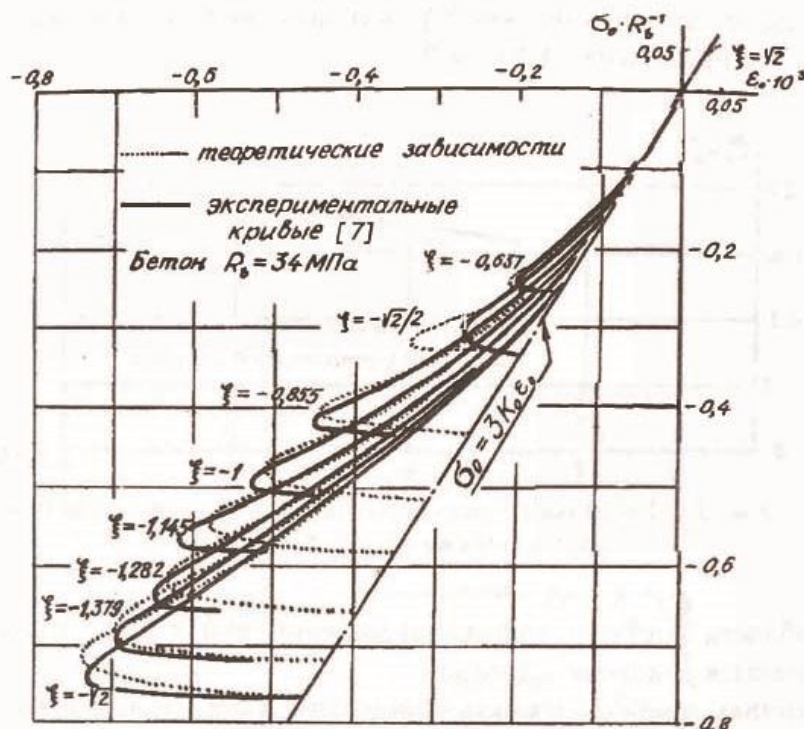


Рисунок 3. Теоретические и экспериментальные зависимости  $\sigma_0 - \varepsilon_0$



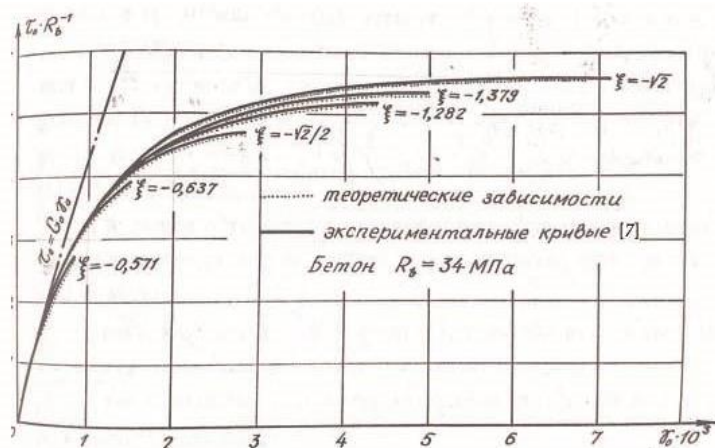


Рисунок 4. Теоретические и экспериментальные зависимости  $\tau_0 - \gamma_0$

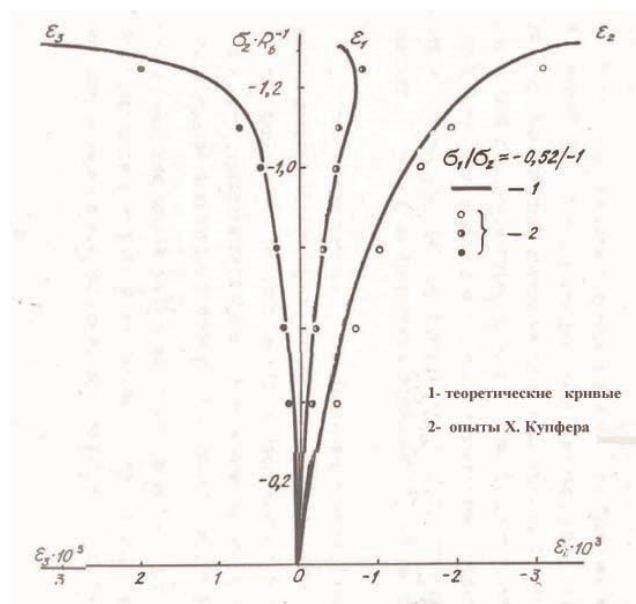


Рисунок 5. Зависимости  $\sigma - \epsilon$  для бетона по экспериментам Х. Купфера

Анализируя представленные экспериментальные и теоретические зависимости  $\sigma_0 - \epsilon_0$  и  $\tau_0 - \gamma_0$ , а также  $\sigma_i \sim \epsilon_i$  для плоского напряжённого состояния можно отметить их вполне удовлетворительное соответствие.

### Выводы

В статье предложен новый подход к построению основных физических соотношений, основанный на инвариантном решении задач механики деформируемого твёрдого тела для бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии. Показано соответствие предлагаемых зависимостей реальному напряжённому и деформируемому состоянию материала.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников В.И., Ерофеев В.Т., Тараканов О.В. Суспензионно-наполненные бетонные смеси для порошково-активированных бетонов нового поколения. Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. №4 (688). С. 30–37.

2. Калашников В.И., Ерофеев В.Т., Тараканов О.В., Архипов В.П. Концепция стратегического развития пластифицированных порошково-активированных бетонов нового поколения. Высокопрочные цементные бетоны: технологии, конструкции, экономика (ВПБ-2016): Сборник тезисов докладов междунар. научно-тех. конф. Казань. 2016. С. 36.
3. Петер Либлани, Даниэль Рингвельски. Влияние технологии перемешивания на свойства сверхпрочных бетонов. СРІ – Международное бетонное производство. 2012. №3. С. 32–35.
4. Каприелов С.С., Чилин И.А. Сверхвысокопрочный самоуплотняющийся фибробетон для монолитных конструкций. Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону. Т. 3. Москва. 12–16 мая 2014 г. с. 158–164.
5. Сильвер Дею. Аспекты применения неметаллической фибры. Исследование применения фибры для изделий из бетона. СРІ – Международное бетонное производство. 2011. №4. С. 46–56.
6. Калашников В.И., Ерофеева И.В., Володин В.М., Абрамов Д.А. Высокоэффективные самоуплотняющийся порошково-активированные песчаные бетоны и фибробетоны. Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1–2. <https://www.science-education.ru/pdf/2015/1-2/237/pdf>.
7. Баженов Ю.М. Современная технология бетона // Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону. Т. 7. Москва. 12–16 мая 2014 г. с. 23–28.
8. Фаликман В.Р., Сорокин Ю.В., Калашников О.О. Строительно-технические свойства особо высокопрочных быстротвердеющих бетонов // Бетон и железобетон. 2004. №5. С. 5–10.
9. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – М. Высшая школа, 1961. – 538 с.
10. Новожилов В.В. Пути развития теории деформирования поликристаллов // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твёрдого тела. – М., 1984. – С. 11–24.
11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М: Наука, 1979 – 744 с.
12. Карпенко Н.И., Круглов В.М., Соловьёв Л.Ю. Нелинейное деформирование бетона и железобетона. – Новосибирск: Издательство СГУПС, 2001. – 276 с.
13. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.
14. Берг О.А., Щербаков Е.А., Писанко Г.Н. Высокопрочный бетон. – М: Стройиздат, 1971. – 208 с.
15. Kupfer H.V. Das Nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung // Beton und Stahlbetonbau. – 1973. – №11. – p. 269–274.
16. Kupfer H.V., Gensterl K.H. Behavior of Concrete under Biaxial stresses // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1973. – vol. 99 – №4. – p. 852–866.
17. Kupfer H.V., Hilsdorf H.K., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial stresses // J. of the ACI. – 1969. – August – p. 656–666.

**Kruglov Valeriy Mihailovich**

Russian university of transport, Moscow, Russia  
E-mail: tu@miit.ru

**Erofeev Vladimir Trofimovich**

Mordovia state university, Saransk, Russia  
E-mail: ira.erofeeva.90@mail.ru

**Vatin Nikolay Ivanovich**

Peter the great Saint Petersburg state polytechnic university, Saint Petersburg, Russia  
E-mail: vatin\_ni@spbstu.ru

**Al-Dulaimi Salman Dawood Salman**

Ministry of higher education and scientific research, Baghdad, Iraq  
E-mail: salmoon-1985@mail.ru

## Version of the deformation theory of plastic ductility of concrete in a plane stress state

**Abstract.** Reinforced concrete as one of the main materials for a wide class of building structures for civil, industrial and transport purposes has a number of specific properties: physical nonlinearity, anisotropy, and crack formation. The behavior of reinforced concrete in the elastoplastic stage before its destruction is more characterized by deformation of concrete. It is shown that the physical nonlinearity of concrete is due to plastic deformations, which are characteristic of various types of stress state. For a triaxial stress state, the system of equations in the mechanics of a deformable solid, it includes two groups of formulas that combine nine equations that include 15 unknowns (three displacements, six strain components, and six stress components). In order for the system to be closed, it is necessary to supplement it with six equations. Such equations are the basic physical relationships that relate the six stress components to the six strain components. The use of linear relationships between stresses and strains introduces the greatest error in the assessment of the stress-strain state (NDS) of structures made of materials with the properties of nonlinearly deformable bodies. In this regard, the more correctly the physical law defining the correlation reflects the material, according to which the material resists various types of deformations, the less error will be allowed in the assessment of the NDS of structures. The article proposes a new approach to the construction of basic physical relationships based on an invariant solution to the problems of mechanics of a deformable solid for concrete in a plane stress state. The correspondence of the proposed dependences to the real stress and deformable state of the material is shown.

**Keywords:** concrete; reinforced concrete; plasticity; deformation theory; stress state

### REFERENCES

1. Kalashnikov V.I., Erofeev V.T., Tarakanov O.V. (2016). Suspension-filled concrete mixes for powder-activated concrete of a new generation. *News of higher educational institutions. Construction*, 4(688), pp. 30–37 (in Russian).
2. Kalashnikov V.I., Erofeev V.T., Tarakanov O.V., Arkhipov V.P. (2016). Kontseptsiya strategicheskogo razvitiya plastifitsirovannykh poroshkovo-aktirovannykh betonov novogo pokoleniya. Vysokoprochnye tsementnye betony: tekhnologii, konstruksii, ehkonomika (VPB-2016). [*The concept of strategic development of plasticized powder-activated concrete of a new generation. High-strength cement concretes: technologies, structures, economics (VPB-2016).*] Kazan, p. 36.

3. Peter Liblani, Daniehl' Ringvel'ski (2012). The influence of mixing technology on the properties of heavy-duty concrete. *CPI – International Concrete Production*, 3, pp. 32–35 (in Russian).
4. Kaprielov S.S., Chilin I.A. (2014). Sverkhvysokoprochnyy samouplotnyayushchiysya fibrobeton dlya monolitnykh konstruksiy. *Beton i zhelezobeton – vzglyad v budushchee*. [Ultra-high-strength, self-compacting fiber-reinforced concrete for monolithic structures. *Concrete and reinforced concrete – a look into the future.*] Moscow, pp. 158–164.
5. Sil'ver Deoyu (2011). Aspects of the use of non-metallic fiber. Study of the use of fiber for concrete products. *CPI – International Concrete Production*, 4, pp. 46–56 (in Russian).
6. Kalashnikov V.I., Erofeeva I.V., Volodin V.M., Abramov D.A. (2015). Highly effective self-compacting powder-activated sand concrete and fiber concrete. *Modern problems of science and education*, [online] 1–2. Available at: <https://www.scince-educationru/pdf/2015/1-2/237/pdf> (in Russian).
7. Bazhenov Yu.M. (2014). Sovremennaya tekhnologiya betona // *Beton i zhelezobeton – vzglyad v budushchee*. [Modern technology of concrete // *Concrete and reinforced concrete – a look into the future.*] Moscow, pp. 23–28.
8. Falikman V.R., Sorokin Yu.V., Kalashnikov O.O. (2004). Construction and technical properties of particularly high-strength quick-hardening concrete. *Concrete and reinforced concrete*, 5, pp. 5–10 (in Russian).
9. Bezukhov N.I. (1961). Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti. [Fundamentals of the theory of elasticity, ductility and creep.] Moscow: Graduate School, p. 538.
10. Novozhilov V.V. (1984). Puti razvitiya teorii deformirovaniya polikristallov // *Nelineynye modeli i zadachi mekhaniki deformiruemogo tvyordogo tela*. [Ways of development of the theory of polycrystal deformation // *Nonlinear models and problems of mechanics of a deformable solid.*] Moscow, pp. 11–24.
11. Rabotnov Yu.N. (1979). Mekhanika deformiruemogo tvyordogo tela. [Deformable Solid Mechanics.] Moscow: The science, p. 744.
12. Karpenko N.I., Kruglov V.M., Solov'yov L.Yu. (2001). Nelineynoe deformirovanie betona i zhelezobetona. [Nonlinear deformation of concrete and reinforced concrete.] Novosibirsk: Publishing House Siberian State University of Railway Engineering, p. 276.
13. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. (1976). Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhyonnom sostoyanii. [Deformation and strength of materials in complex stress state.] Kiev: Scientific Opinion, p. 416.
14. Berg O.A., Shcherbakov E.A., Pisanko G.N. (1971). Vysokoprochnyy beton. [High strength concrete.] Moscow: Stroyizdat, p. 208.
15. Kupfer H.B. (1973). Das Nicht-linear Verhasten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung. *Beton und stahlbetonbau*, 11, pp. 269–274.
16. Kupfer H.B., Genstle K.H. (1973). Behavior of Concrete under Biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 4(99), pp. 852–866.
17. Kupfer H.B., Hilsdorf H.K., Rusch H. (1969). Behavior of Concrete under Bizx Biaxial stresses. *J. of the ACI*, pp. 656–666.