

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2023, Том 10, № 4 / 2023, Vol. 10, Iss. 4 <https://t-s.today/issue-4-2023.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/10SATS423.pdf>

DOI: 10.15862/10SATS423 (<https://doi.org/10.15862/10SATS423>)

2.1.8. Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей
(технические науки)

Применение функции напряжений и рядов Фурье для расчета многослойной армированной дорожной конструкции

¹Матвеев С.А., ¹Боброва Т.В., ²Столбов Ю.В.

¹ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет», Омск, Россия

²ФГБОУ ВО «Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина», Омск, Россия

Автор, ответственный за переписку: Матвеев Сергей Александрович, e-mail: dfsibadi@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке метода расчета на статическую нагрузку многослойной дорожной конструкции с армированными слоями. В отличие от традиционной практики расчета подобных конструкций, в которой и армированные и неармированные слои рассматриваются как слои изотропные, в данной статье армированные слои представлены как слои ортотропные, а неармированные — как изотропные. Расчетная модель конструкции с изотропными и ортотропными слоями рассматривается в рамках плоской задачи теории упругости. Ширина всех слоев в поперечном направлении одинакова. Разрешающие уравнения получены из уравнений совместности деформаций с привлечением функции напряжений и рядов Фурье. Неизвестные постоянные получены из граничных условий и условий сопряжения слоев. Выведены формулы для определения максимальных прогибов.

В качестве примера приведен расчет двухслойной конструкции, верхний слой которой армирован объемной георешеткой, нижний слой не армирован. Равномерно распределенная нагрузка приложена на ограниченной части поверхности верхнего слоя. В

статье представлена графическая зависимость максимальных прогибов двухслойной системы от числа членов ряда. Полученные в результате расчета прогибы двухслойной конструкции сравниваются с максимальными прогибами одинаковой по толщине однослойной неармированной конструкции, а также с результатами натурного эксперимента. Эффект от армирования верхнего слоя конструкции определяется как отношение разности максимальных прогибов неармированной и армированной конструкций к максимальному прогибу неармированной конструкции. Вычисленный по предложенной теории эффект от армирования составил 16 %, а полученный в результате натурного эксперимента — 10 %. Отличие объясняется различием размеров и формы грузовой площадки, а также различием плоской и объемной моделей деформирования теоретической модели и реальной конструкции.

Ключевые слова: дорожная конструкция; многослойная система; армированный слой; плоская задача теории упругости; функция напряжений; ряды Фурье; эффект армирования

Application of stress function and Fourier's series for calculation of multilayer reinforced road structure

¹Sergey A. Matveev, ¹Tatyana V. Bobrova, ²Yury V. Stolbov

¹Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russia

²Omsk State Agrarian University named after P.A. Stolypin, Omsk, Russia

Corresponding author: Sergey A. Matveev, e-mail: dfsibadi@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the development of a method for static load calculation of a multilayer reinforced road structure. Unlike the traditional calculation practice of such structures, in which both reinforced and unreinforced layers are considered as isotropic layers, in this paper reinforced layers are presented as orthotropic layers, and unreinforced layers as isotropic. The computational model of the structure with isotropic and orthotropic layers is considered in the framework of the plane problem of elastic theory. The width of all layers in the crosswise direction is the same. The resolving equations are derived from the equations of strain compatibility involving the stress function and Fourier's series. The unknown constants are obtained from the boundary conditions and layer coupling conditions. Formulas for determining the maximum deflections are derived.

As an example, the two-layer structure calculation is given, the upper layer of which is reinforced with a geocell and the lower layer is unreinforced. A uniform loading is applied on a limited part of the upper layer

surface. The paper presents a maximum deflections dependence diagram of the two-layer system on the number of terms of the series. The calculated deflections of the two-layer structure are compared with the maximum deflections of an equally thick unreinforced single-layer structure, as well as with the results of field experiments. The effect of reinforcing the upper layer of the structure is defined as the ratio of the difference between the unreinforced and reinforced maximum deflections of structures and the unreinforced structure maximum deflection. The reinforcement effect calculated according to the proposed theory was 16 %, while the effect obtained as a result of field experiment was 10 %. The difference is explained by the difference in the size and shape of the load deck, as well as the difference between the plane and volume deformation models of the theoretical model and the real structure.

Keywords: road structure; multilayer system; reinforced layer; plane problem of elasticity theory; stress function; Fourier's series; reinforcement effect

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons "Attribution" («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons "Attribution" 4.0 Global License



Введение

Introduction

Общим недостатком существующих подходов при решении вопросов применения геосинтетических материалов для армирования дорожных конструкций является попытка привлечения традиционных методик расчета конструкций со сплошными, однородными, изотропными слоями для расчета армированных конструкций, являющихся по существу конструктивно анизотропными. В данной работе предложен альтернативный подход, базирующийся на теории изгиба многослойной полиармированной плиты на упругом основании [1].

Армирование грунтов геосинтетическими материалами уже более полувека активно внедряется в практику дорожного строительства [1; 2]. Армируются как верхние слои покрытия, так и нижние слои основания дорожной одежды [3–7], а также насыпь земляного полотна [8]. В качестве армирующих элементов, как правило, используют пространственные и плоские георешетки [9–15], изготавливаемые из различных полимерных и синтетических материалов, а также металлических, базальтовых и стекловолокон.

Проблеме расчёта дорожных конструкций с использованием объёмных георешёток посвящены многочисленные исследования как отечественных, так и зарубежных авторов. Наиболее полный их анализ содержится в работе [1]. Существовавшие ранее методики расчёта были разработаны эмпирическим путём и опирались на сравнительно малочисленные результаты экспериментов [16]. По данным зарубежных исследователей, общую толщину верхнего слоя основания из зернистого материала можно существенно уменьшить за счёт применения объёмной георешётки. Результаты испытаний на трехосное сжатие различных зернистых заполнителей продемонстрировали, что объёмная георешётка придает заполнителю так называемое «кажущееся» сцепление порядка $150\div 190$ кПа [17]. Сцепление обеспечивает дополнительную прочность при сдвиге по сравнению с природной.

Опыт применения георешётки Прудон-494 при строительстве автомобильных дорог IV и V категорий (с интенсивностью до 200 авт./сут.) свидетельствует о возможности снижения на 30–50 % толщины дорожной одежды с георешёткой по сравнению с традиционной конструкцией.

Наиболее эффективно применение георешёток в сочетании с другими геосинтетическими материалами на участках дорог, расположенных на слабых грунтах (переувлажненных, заторфованных, сыпучих и т. д.).

Механизм работы слоя грунта, армированного объёмной георешёткой, экспериментально изучался канадскими исследователями [17]. Суть этих исследований состоит в следующем. Характерное разрушение грунтового основания при воздействии нагрузки, сосредоточенной на малых площадях, происходит путём образования поверхностей скольжения и выдавливания грунта. Вертикальные стенки георешётки препятствуют развитию поверхностей скольжения вблизи поверхности грунта, «загоняя» их глубже в подстилающие грунты основания. Перераспределение давления, которое происходит в пределах ограниченной зоны, весьма сложно, так как при этом происходит пространственное взаимодействие грунта заполнения и ячеистой структуры. Если рассматривать отдельно взятую ячейку, нагруженную вертикальной нагрузкой, как показано в работах [1; 16], то стенки ячейки, растягиваясь, создают эффект обжатия грунта подобно обручу, ограничивая в грунте деформации в поперечном по отношению к стенке направлении и увеличивая таким образом прочность грунта на сдвиг. В результате такая конструкция может выдержать более тяжёлые нагрузки.

Экспериментально установленное [16] увеличение сдвиговой прочности несвязного грунта на 150–190 кПа за счёт обжатия моделируется авторами введением дополнительного «кажущегося» сцепления.

Активное вертикальное давление на грунт, заполняющий ячейку, создает реактивное горизонтальное давление на грунт со стороны стенок ячейки. За счёт сил трения между грунтом и стенкой ячейки нагрузка от грунта передается на георешётку и заставляет включаться в работу соседние ячейки, которые оказывают пассивное сопротивление деформациям георешётки в поперечном направлении. В итоге получается композитный слой армированного грунта, обладающий изгибной жёсткостью и повышенной несущей способностью, который может рассматриваться как плита на упругом основании.

Использование объёмной георешётки при строительстве дорог на слабых основаниях исследовалось экспериментально канадскими учеными установившими, что объёмная георешётка эффективна при очень низких вертикальных перемещениях и деформациях. Для сравнения, армирование многослойной системы геосинтетикой, работающей на растяжение, такой, например, как геотекстиль, наиболее эффективно при сравнительно высоких вертикальных перемещениях и деформациях. Это может быть объяснено тем, что большинство полимерных рулонных армирующих материалов оказывает сопротивление растяжению только при значительных деформациях.

Как уже упоминалось, уплотненный грунт внутри ячейки удерживается за счёт мембранного эффекта со стороны стенок ячейки и за счёт пассивного сопротивления со стороны окружающих ячеек. Под нагрузкой при малых деформациях грунт заполнения испытывает внутреннее боковое сжатие, в итоге возрастает жёсткость всей системы и её распределительная способность. При увеличении глубины ячеек толщина армированного слоя возрастает, а его изгибная жёсткость, как в любой плите, увеличивается.

Для количественной оценки эффекта появления сдвиговой прочности в несвязных грунтах за счёт их обжатия ячеистой структурой проведены эксперименты в Королевском военном колледже в Канаде в начале 1990-х годов. Для испытаний использовали объёмную георешётку из полиэтилена высокого давления с высотой стенки 200 мм и диаметром ячейки 200 мм. Для заполнения брали два типа зернистого материала — кварцевый песок и известняковый щебень.

Первую часть испытаний проводили на материалах, не укрепленных георешёткой, вторую — на укрепленных. Результаты испытаний показали, что георешётка увеличивает прочность и жёсткость зернистых материалов и эффект их обжатия внутри ячейки георешётки эквивалентен появлению «кажущегося» сцепления между зёрнами, величина которого лежит в интервале 150÷190 кПа.

Ещё один вид испытаний, который осуществляли там же — испытания на многократно прикладываемую циклическую нагрузку. Конструкцию основания из кварцевого песка подвергали многократному нагружению (500 тыс. раз). В результате установлено следующее: чтобы получить одинаковую деформацию, накопленную в результате многократного нагружения основания, укрепленного и неукрепленного георешёткой, необходимо, чтобы количество приложений нагрузки в первом случае было в 10 раз больше, чем во втором.

Испытания на многократно прикладываемую циклическую нагрузку проводили также в Великобритании и Германии. Результаты испытаний убедительно продемонстрировали преимущества конструкций с основаниями, укрепленными георешётками. Так, в результате применения георешётки нормальные вертикальные напряжения на границе основания с подстилающим слоем существенно снизились. Величина относительного снижения вертикальных сжимающих напряжений составила от 23 до 56 %. После многократного воздействия циклической нагрузки деформации испытываемых секций, лежащих на основании с георешёткой, оказались на 40 % ниже, чем без георешётки.

В Королевском военном колледже в Канаде провели испытания армированного объёмной георешёткой слоя грунта, лежащего на слабом основании из торфа, с целью изучения распределительной способности армированного слоя. Сравнительно высокая жёсткость слоя, армированного объёмной георешёткой, была очевидна. Высокая распределительная способность армированного слоя проявлялась при малых вертикальных перемещениях. Результаты исследования показали, что деформации армированного слоя толщиной 150 мм, включающего георешётку с высотой стенки 100 мм, эквивалентны деформациям неармированного слоя толщиной 300 мм, а деформации армированного слоя толщиной 300 мм с георешёткой высотой 200 мм эквивалентны деформациям неармированного слоя толщиной 500÷600 мм.

В работе [18] выделены три основных типа дорожных одежд, в которых применение объёмных георешёток дает наибольший эффект:

- конструкции дорожной одежды переходного типа;
- основание нежёсткой дорожной одежды;
- основание жёсткой дорожной одежды.

Так, в нежёстких дорожных одеждах использование объёмной георешётки позволяет:

- повысить плотность заполнителей из зернистых материалов;
- увеличить распределяющую способность слоя;
- снизить контактное давление на грунт земляного полотна;
- уменьшить интенсивность образования колеи.

Анализ приведённых данных свидетельствует, что основной эффект от применения объёмной георешётки в конструкции дорожной одежды достигается за счёт:

- уменьшения толщины несущей конструкции при одинаковых нагрузках;
- увеличения несущей способности грунта; использования местных строительных материалов; технологии монтажа, которая проста, позволяет быстро проводить работы и не требует специального оборудования.

Помимо объёмных георешёток или геосот, для армирования дорожных конструкций широко применяют плоские георешетки и геосетки.

Геосетка — плоский рулонный материал сетчатой структуры, образованной эластичными рёбрами из высокопрочных пучков нитей, скреплёнными в узлах прошивочной нитью, переплетением, склеиванием, сплавлением или иным способом, с образованием ячеек, размеры которых больше образующих сетку рёбер, обработанный специальными органическими составами для улучшения свойств и повышения их стабильности.

Георешётка (плоская) — плоский рулонный материал сетчатой структуры толщиной до 10 мм, образованной жёсткими плоскими монолитными рёбрами, объединёнными в узлах, с образованием ячеек, размеры которых больше образующих решётку рёбер.

Плоские георешётки и геосетки отличаются высокими механическими характеристиками и применяются для создания армирующих прослоек. Полимерными георешётками армируют основания дорожных одежд из крупнофракционных материалов, а также основания и тело насыпей. Геосетки чаще применяют для армирования верхних слоёв дорожных одежд из разного вида асфальтобетонов.

Результаты исследований щебёночных оснований нежёстких дорожных одежд, армированных сетками, выполненные в СоюзДОРНИИ, показали, что геосетки практически не оказывают влияния на упругий прогиб конструкции, но способствуют существенному снижению максимальных активных сдвигающих напряжений в грунте, подстилающем щебёночное основание.

По мнению профессора Казарновского применение геосеток при армировании оснований наиболее целесообразно в тех условиях, где определяющим является сдвиг в подстилающем грунте.

При армировании слоистых конструкций объёмными и плоскими георешётками, ориентированными в направлении движения, расчётной моделью армированного слоя является модель ортотропного тела [19; 20].

Будем считать, что верхний слой, представленный георешёткой, заполненной песком, представляет собой сплошную плиту. Геометрические размеры такого слоя позволяют отнести его к жестким пластинам. При малых деформациях основные усилия в таких пластинах возникают от изгиба. При этом появляются как растягивающие, так и сжимающие напряжения в слое. Песок как дискретный материал не способен воспринимать растягивающие напряжения. Подстилающий слой песка работает как упругое основание. Предположим, что по ширине проезжей части нагрузка распределена равномерно, а вдоль проезжей части размеры грузовой площадки ограничены. Такой характер нагружения возможен в случаях движения нескольких колонн автомобилей в попутном или встречном направлениях, когда положения нагруженных осей всех

автомобилей, оказавшихся в одном поперечнике, совпадают. Подобная ситуация может возникать при обгоне и встречном движении, когда в один поперечник попадают нагруженные оси нескольких расчетных автомобилей, а также при перевозке тяжелой спецтехники на многоосных трейлерах.

Основные соотношения для многослойной конструкции

Basic relations for a multilayer structure

Пусть ось x направлена вдоль дорожного полотна, ось y — поперек, ось z — вниз. Нумерацию слоев начинаем с верхнего слоя. Пусть общее количество слоев равно m , а общая толщина всего пакета — h (рис. 1):

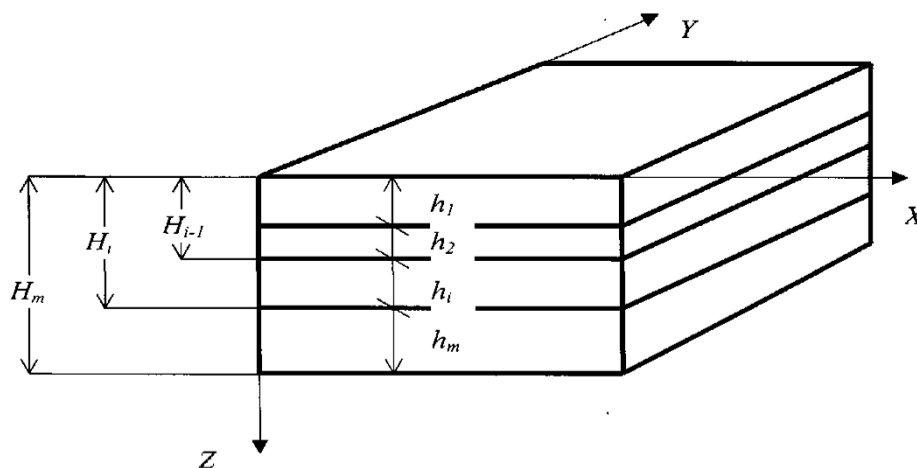


Рисунок 1. Схема многослойной конструкции (схема составлена авторами)

Figure 1. Schematic diagram of a multilayer structure (schematic drawn by the authors)

$$z_0 = 0; \quad z_i = \sum_{k=1}^i h_k; \quad h_0 = 0; \quad h_i = z_i - z_{i-1}; \quad \sum_{i=1}^m h_i = h. \quad (1)$$

Нагрузка изменяется только в продольном направлении, а по ширине не меняется, поэтому зависимости от координаты y отсутствуют:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\dots) = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0. \quad (2)$$

Используя модель плоского напряженного состояния в системе координатных осей XZ , выделим элементарный слой на глубине z . Пусть этот слой имеет номер i . Уравнения равновесия для i -го слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^i}{\partial x} + \frac{\partial N_{xz}^i}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial N_{zx}^i}{\partial x} + \frac{\partial N_z^i}{\partial z} + P_i(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N_x^i , N_z^i , N_{xz}^i — внутренние усилия, определяемые из выражений:

$$N_x^i = 2b(x)\sigma_x^i(x, z); \quad N_z^i = 2b(x)\sigma_z^i(x, z); \quad N_{xz}^i = 2b(x)\tau_{xz}^i(x, z); \quad (4)$$

$2b(x)$ — ширина насыпи; $P_i(x, z)$ — массовая нагрузка:

$$P_i(x) = 2\rho_i b_i(x), \quad (5)$$

ρ_i — объемный вес i -го слоя, выраженный через объёмные веса основного (заполняющего) ρ_{io} и армирующего ρ_{ia} материалов:

$$\rho_i = \eta_{io}\rho_{io} + \eta_{ia}\rho_{ia}. \quad (6)$$

Здесь η_{io} , η_{ia} — коэффициенты, отражающие удельную долю соответственно основного и армирующего материалов в единице объёма i -го слоя.

Введем функцию напряжений $\Psi_i(x, z)$ и выразим с ее помощью внутренние усилия:

$$N_x^i = \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2}; \quad N_{xz}^i = -\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial z}; \quad N_z^i = \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} - \int_{z_{i-1}}^z P_i dz. \quad (7)$$

Интегрирование по толщине i -го слоя функции (5) приводит к следующему выражению:

$$\int_{z_{i-1}}^z P_i dz = 2\rho_i b(z - z_i). \quad (8)$$

В соответствии с предложенной моделью в случае плоского напряженного состояния в плоскости XZ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_z^i; \\ \varepsilon_z^i &= a_{21}^i \sigma_x^i + a_{22}^i \sigma_z^i; \\ \gamma_{xz}^i &= a_{33}^i \tau_{xz}^i. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь σ_x^i , σ_z^i , τ_{xz}^i напряжения в i -том слое, определяемые по формулам, полученным из выражений (4):

$$\sigma_x^i = \frac{N_x^i}{2b_i}; \quad \sigma_z^i = \frac{N_z^i}{2b_i}; \quad \tau_{xz}^i = \frac{N_{xz}^i}{2b_i}. \quad (10)$$

Для i -го слоя выполняется уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z^i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}^i}{\partial x \partial z} = 0. \quad (11)$$

После подстановки соотношений (10) и (7) в выражения (9) и двойного дифференцирования последних с последующей подстановкой результатов дифференцирования в уравнение (11), получим:

$$\frac{\partial^4 \Psi_i}{\partial z^4} + H_{1i} \eta^2 \frac{\partial^4 \Psi_i}{\partial x^2 \partial z^2} + H_{2i} \eta^4 \frac{\partial^4 \Psi_i}{\partial x^4} = 0, \quad i = 1, m. \quad (12)$$

Здесь $H_{1i}, \dots, H_{2i}$ — безразмерные постоянные, определяемые из выражений:

$$H_{1i} = \frac{2a_{12}^i + a_{33}^i}{a_{11}^i}; \quad H_{2i} = \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i}; \quad \eta = \frac{h}{l}. \quad (13)$$

Примем для функции напряжений i -го слоя выражение:

$$\Psi_i(x, z) = \frac{1}{2} f_{io} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}(z) \cos \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi. \quad (14)$$

После дифференцирования функции напряжений (14) и подстановки в уравнение (12) получим систему, состоящую из уравнений:

$$\frac{d^4 f_{io}}{dz^4} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{d^4 f_{ik}}{dz^4} - 2\gamma_i \frac{d^2 f_{ik}}{dz^2} + \delta_i^2 f_{ik}(z) = 0; \quad i = 1, m; \quad k = 1, \infty \quad (16)$$

где

$$\gamma_i = \frac{1}{2} H_{1i} \lambda_k^2 = \frac{\lambda_k^2}{2a_{11}^i} (2a_{12}^i + a_{33}^i); \quad (17)$$

$$\delta_i = \lambda_k^2 \sqrt{H_{2i}} = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{a_{22}^i}{a_{11}^i}}; \quad i = 1, m; \quad \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty.$$

Решением дифференциального уравнения (15) является функция:

$$f_{io} = A_{io} z^3 + B_{io} z^2 + C_{io} z + D_{io}; \quad i = 1, m, \quad (18)$$

где $A_{io}, B_{io}, C_{io}, D_{io}$ — постоянные, определяемые из граничных условий.

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения (16) имеет вид:

$$r^4 - 2\gamma_i r^2 + \delta_i^2 = 0. \quad (19)$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} r_{i1} &= \sqrt{\gamma_i + \sqrt{(\gamma_i^2 - \delta_i^2)}}; \quad r_{i2} = \sqrt{\gamma_i - \sqrt{(\gamma_i^2 - \delta_i^2)}}; \\ r_{i3} &= -\sqrt{\gamma_i + \sqrt{(\gamma_i^2 - \delta_i^2)}}; \quad r_{i4} = -\sqrt{\gamma_i - \sqrt{(\gamma_i^2 - \delta_i^2)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если $\gamma_i \neq \delta_i$, то решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f_{ik} = A_{ik} e^{r_{i1}z} + B_{ik} e^{r_{i2}z} + C_{ik} e^{r_{i3}z} + D_{ik} e^{r_{i4}z}. \quad (21)$$

В случае $\gamma_i^2 = \delta_i^2$ имеем решение в виде:

$$f_{ik} = A_{ik} e^{r_{i1}z} + B_{ik} z e^{r_{i1}z} + C_{ik} e^{r_{i3}z} + D_{ik} z e^{r_{i3}z}. \quad (22)$$

Коэффициенты $A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, D_{ik}, (i=1, m)$ определяются из граничных условий и условий сопряжения слоев.

$$\text{при } z=0; N_z^1 = -q; N_{xz}^1 = 0, \quad (23)$$

$$\text{при } z=z_i; N_z^i = N_z^{i+1}; N_{xz}^i = N_{xz}^{i+1}; u^i = u^{i+1}; w^i = w^{i+1}, \quad (24)$$

$$\text{при } z=h; u^m = 0; w^m = 0. \quad (25)$$

Граничные условия и условия сопряжения слоев

Boundary conditions and layer coupling conditions

Выражения для внутренних усилий в соответствии с (7) и (14) имеют вид:

$$\begin{aligned} N_x^i &= \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 f_{io}}{dz^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_{ik}}{dz^2} \cos \lambda_k x; \\ N_z^i &= \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} - \int_{z_{i-1}}^z P_i dz = -\frac{1}{2} P_{io}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^2 f_{ik}(z) + P_{ik}(z)] \cos \lambda_k x; \\ N_{xz}^i &= -\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{df_{ik}}{dz} \sin \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi. \end{aligned} \quad (26)$$

Для ортотропного слоя первая производная функции $f_{ik}(z)$ в третьей формуле (26) определяется выражением:

$$\frac{df_{ik}}{dz} = A_{ik} r_{i1} e^{r_{i1}z} + B_{ik} r_{i2} e^{r_{i2}z} + C_{ik} r_{i3} e^{r_{i3}z} + D_{ik} r_{i4} e^{r_{i4}z}, \quad (27)$$

а для изотропного слоя:

$$\frac{df_{ik}}{dz} = A_{ik} r_{i1} e^{r_{i1}z} + B_{ik} e^{r_{i1}z} (r_{i1}z + 1) + C_{ik} r_{i3} e^{r_{i3}z} + D_{ik} e^{r_{i3}z} (r_{i3}z + 1). \quad (28)$$

Функции $P_{io}(z)$, $P_{ik}(z)$ во второй формуле (26) получены при разложении в ряд Фурье функции $\int_{z_{i-1}}^z P_i(z) dz$, значения которой не зависят от координаты x :

$$\begin{aligned} \int_{z_{i-1}}^z P_i(z) dz &= \frac{1}{2} P_{io}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(z) \cos \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi; \\ P_{io}(z) &= 2 \int_{z_{i-1}}^z P_i(z) dz = 2 \int_{z_{i-1}}^z 2\rho_i b dz = 4\rho_i b (z - z_{i-1}); \\ P_{ik}(z) &= \left(\frac{4}{\lambda_k} \sin \frac{\lambda_k}{2} \right) \int_{z_{i-1}}^z P_i(z) dz = \frac{8b}{\lambda_k} \rho_i (z - z_{i-1}) \sin \frac{\lambda_k}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для записи граничных условий на поверхности разложим нагрузку $q(x)$ в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} q_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k} \cos \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi; \\ q_{10} &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q(x) dx; \quad q_{1k} = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q(x) \cos \lambda_k x dx. \end{aligned} \quad (30)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки $q(x) = 2q_0 b$ на интервале $\left[-\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}\right]$, лежащем внутри интервала $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (рис. 2).

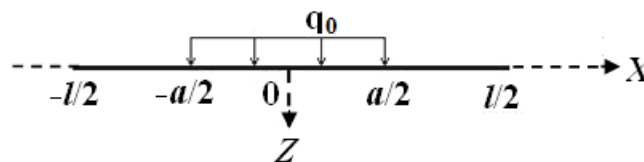


Рисунок 2. Схема нагружения (схема составлена авторами)

Figure 2. Loading diagram (schematic by the authors)

q_{10} и q_{1k} определяются из выражений:

$$q_{10} = 2 \int_{-\frac{\xi}{2}}^{\frac{\xi}{2}} q(x) dx = 4q_0 b \xi; \quad q_{1k} = \frac{8bq_0}{\lambda_k \xi} \sin \frac{\lambda_k \xi}{2}, \quad \xi = \frac{a}{l}; \quad \lambda_k = k\pi. \quad (31)$$

При $z = 0$ граничные условия (23) принимают вид:

$$A_{1k} + B_{1k} + C_{1k} + D_{1k} = \frac{q_{1k}}{\lambda_k^2}; \quad \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty. \quad (32)$$

и

$$A_{1k}r_{11} + B_{1k}r_{12} + C_{1k}r_{13} + D_{1k}r_{14} = 0. \quad (33)$$

Рассмотрим условия сопряжения слоев (24). Предположим, что i -й слой — ортотропный, а $(i+1)$ -й слой — изотропный. Первое условие $N_z^i = N_z^{i+1}$ при $z = z_i$ будет выглядеть так:

$$A_{ik}e^{r_{i1}z_i} + B_{ik}e^{r_{i2}z_i} + C_{ik}e^{r_{i3}z_i} + D_{ik}e^{r_{i4}z_i} - A_{i+1,k}e^{r_{i+1,1}z_i} - B_{i+1,k}z_i e^{r_{i+1,1}z_i} - C_{i+1,k}e^{r_{i+1,3}z_i} - D_{i+1,k}z_i e^{r_{i+1,3}z_i} + \frac{8b}{\lambda_k^3} \rho_i h_i \sin \frac{\lambda_k}{2} = 0; \quad \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty. \quad (34)$$

Второе условие $N_{xz}^i = N_{xz}^{i+1}$, при $z = z_i$, запишем в следующем виде:

$$A_{ik}r_{i1}e^{r_{i1}z_i} + B_{ik}r_{i2}e^{r_{i2}z_i} + C_{ik}r_{i3}e^{r_{i3}z_i} + D_{ik}r_{i4}e^{r_{i4}z_i} = A_{i+1,k}r_{i+1,1}e^{r_{i+1,1}z_i} + B_{i+1,k}e^{r_{i+1,1}z_i}(r_{i+1,1}z_i + 1) + C_{i+1,k}r_{i+1,3}e^{r_{i+1,3}z_i} + D_{i+1,k}e^{r_{i+1,3}z_i}(r_{i+1,3}z_i + 1). \quad (35)$$

Прежде, чем рассматривать третье и четвертое условия сопряжения слоев (24) по перемещениям $u^i = u^{i+1}$; $w^i = w^{i+1}$, рассмотрим зависимости между перемещениями и деформациями

$$\frac{\partial u^i}{\partial x} = \varepsilon_x^i(x, z); \quad \frac{\partial w^i}{\partial z} = \varepsilon_z^i(x, z); \quad \frac{\partial w^i}{\partial x} + \frac{\partial u^i}{\partial z} = \gamma_{xz}^i(x, z). \quad (36)$$

В правых частях выражений (36) имеем функции, полученные после подстановки в равенства (9) соотношений (10), (26) и (29):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i(x, z) &= \frac{1}{2}U_{io}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ik}(z) \cos \lambda_k x; \\ \varepsilon_z^i(x, z) &= \frac{1}{2}\chi_{20}^i(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{2k}^i(z) \cos \lambda_k x; \\ \gamma_{xz}^i(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{3k}^i(z) \sin \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_{io}(z) \times \frac{2b_i}{a_{11}^i} &= f_{io}'' + \nu_{21}^i P_{io}; \\ U_{ik}(z) \times \frac{2b_i}{a_{11}^i} &= f_{ik}'' + \nu_{21}^i \lambda_k^2 f_{ik} + \nu_{21}^i P_{ik}; \\ \chi_{20}^i(z) \times \frac{2b_i}{a_{22}^i} &= -\nu_{12}^i f_{io}'' - P_{io}; \\ \chi_{2k}^i(z) \times \frac{2b_i}{a_{22}^i} &= -\nu_{12}^i f_{ik}'' - \lambda_k^2 f_{ik} - P_{ik}; \\ \chi_{3k}^i(z) \times \frac{2b_i}{a_{33}^i} &= \lambda_k f_{ik}'. \end{aligned} \quad (38)$$

Первая производная f_{ik}' по z определена выражениями (27) и (28), а вторые производные функций f_{io} , f_{ik} по z имеют вид:

$$\begin{aligned} f''_{io} &= 6A_{io}z + 2B_{io}; \\ f''_{ik} &= A_{ik}r_{i1}^2 e^{r_{i1}z} + B_{ik}r_{i2}^2 e^{r_{i2}z} + C_{ik}r_{i3}^2 e^{r_{i3}z} + D_{ik}r_{i4}^2 e^{r_{i4}z}; \\ f''_{ik} &= A_{ik}r_{i1}^2 e^{r_{i1}z} + B_{ik}r_{i1} e^{r_{i1}z} (r_{i1}z + 2) + C_{ik}r_{i3}^2 e^{r_{i3}z} + D_{ik}r_{i3} e^{r_{i3}z} (r_{i3}z + 2). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь второе выражение записано для ортотропного материала, а третье — для изотропного. Штрихами обозначены соответствующие производные функций по координате z :

Из первого равенства (36) получим:

$$u^i(x, z) = \int_0^x \varepsilon_x^i(x, z) dx, \quad (40)$$

а из третьего:

$$w^i(x, z) = \int_0^x \left[\gamma_{xz}^i(x, z) - \frac{\partial u^i}{\partial z} \right] dx. \quad (41)$$

Продифференцируем по z левую и правую части выражения (40) и, учитывая (37), получим:

$$\frac{\partial u^i}{\partial z} = \frac{1}{2} U'_{io}(z)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} U'_{ik}(z) \sin \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi; \quad i = 1, m. \quad (42)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} U'_{io}(z) \times \frac{2b_i}{a_{i1}} &= f'''_{io} + \nu_{21}^i P'_{io}; \\ U'_{ik}(z) \times \frac{2b_i}{a_{i1}} &= f'''_{ik} + \nu_{21}^i \lambda_k^2 f'_{ik} + \nu_{21}^i P'_{ik}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} f'''_{ik} &= A_{ik}r_{i1}^3 e^{r_{i1}z} + B_{ik}r_{i2}^3 e^{r_{i2}z} + C_{ik}r_{i3}^3 e^{r_{i3}z} + D_{ik}r_{i4}^3 e^{r_{i4}z}; \\ f'''_{ik} &= A_{ik}r_{i1}^3 e^{r_{i1}z} + B_{ik}r_{i1}^2 e^{r_{i1}z} (r_{i1}z + 3) + C_{ik}r_{i3}^3 e^{r_{i3}z} + D_{ik}r_{i3}^2 e^{r_{i3}z} (r_{i3}z + 3); \\ f'''_{io} &= 6A_{io}; \quad P'_{io} = 4\rho_i b_i; \quad P'_{ik} = \frac{8b_i}{\lambda_k} \rho_i \sin \frac{\lambda_k}{2}; \\ \lambda_k &= k\pi; \quad k = 1, \infty; \quad i = 1, m. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь первое выражение для третьей производной f'''_{ik} записано для ортотропного материала, а второе — для изотропного.

Интегрируя правую часть выражения (40) с учетом первого равенства (37), получим:

$$u^i(x, z) = \frac{1}{2} U_{io}(z)x + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ik}(z) \sin \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi; \quad i = 1, m, \quad (45)$$

где $U_{io}(z)$, $U_{ik}(z)$ — функции, определяемые выражениями (38).

Интегрируя правую часть выражения (41) с учетом третьего равенства (37) и зависимости (42), получим:

$$w^i(x, z) = -\frac{1}{4}U'_{io}x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (U'_{ik} - \lambda_k \chi_{3k}^i) \cos \lambda_k x; \quad \lambda_k = k\pi; \quad i = 1, m, \quad (46)$$

где $U'_{io}(z)$, $U'_{ik}(z)$ — функции, определяемые выражениями (43), а $\chi_{3k}^i(z)$ — последним выражением (38).

Рассмотрим третье и четвертое условия сопряжения слоев (24) с учетом зависимостей (45) и (46). Для выполнения условия $u^i = u^{i+1}$ необходимо соблюдение равенств:

$$U_{io}(z_i) = U_{i+1,0}(z_i) \quad (47)$$

или

$$3A_{io}z_i + B_{io} + 2\nu_{21}^i \rho_i b_i h_i = \frac{a_{11}^{i+1}}{a_{11}^i} (3A_{i+1,0}z_i + B_{i+1,0}) \quad (48)$$

и

$$U_{ik}(z_i) = U_{i+1,k}(z_i); \quad k = 1, \infty \quad (49)$$

или

$$\begin{aligned} & A_{ik} r_{i1}^2 e^{r_{i1}z_i} + B_{ik} r_{i2}^2 e^{r_{i2}z_i} + C_{ik} r_{i3}^2 e^{r_{i3}z_i} + D_{ik} r_{i4}^2 e^{r_{i4}z_i} + \\ & + \nu_{21}^i \lambda_k^2 (A_{ik} e^{r_{i1}z_i} + B_{ik} e^{r_{i2}z_i} + C_{ik} e^{r_{i3}z_i} + D_{ik} e^{r_{i4}z_i}) + \\ & + \frac{8b}{\lambda_k} (\nu_{21}^i \rho_i h_i) \sin \frac{\lambda_k}{2} = \frac{a_{11}^{i+1}}{a_{11}^i} \left[A_{i+1,k} r_{i+1,1}^2 e^{r_{i+1,1}z_i} + \right. \\ & + B_{i+1,k} r_{i+1,1} e^{r_{i+1,1}z_i} (r_{i+1,1}z_i + 2) + C_{i+1,k} r_{i+1,3}^2 e^{r_{i+1,3}z_i} + D_{i+1,k} r_{i+1,3} e^{r_{i+1,3}z_i} \times \\ & \times (r_{i+1,3}z_i + 2) + \left. \nu_{21}^{i+1} \lambda_k^2 (A_{i+1,k} e^{r_{i+1,1}z_i} + B_{i+1,k} z_i e^{r_{i+1,1}z_i} + C_{i+1,k} e^{r_{i+1,3}z_i} + \right. \\ & \left. + D_{i+1,k} z_i e^{r_{i+1,3}z_i}) \right]; \quad \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty \end{aligned} \quad (50)$$

Равенство (48) выполняется, как для ортотропных, так и для изотропных материалов.

Для выполнения условия $w^i = w^{i+1}$ необходимо соблюдение равенства:

$$U'_{io}(z_i) = U'_{i+1,0}(z_i) \quad (51)$$

или

$$3A_{io} + 2\nu_{21}^i \rho_i b_i = \frac{a_{11}^{i+1}}{a_{11}^i} (3A_{i+1,0} + 2\nu_{21}^{i+1} \rho_{i+1} b_{i+1}), \quad (52)$$

одинакового как для ортотропных, так и для изотропных материалов, а также равенства:

$$U'_{ik}(z_i) - \lambda_k \chi_{3k}^i(z_i) = U'_{i+1,k}(z_i) - \lambda_k \chi_{3k}^{i+1}(z_i); \quad k = 1, \infty \quad (53)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & A_{ik} r_{i1}^3 e^{r_{i1} z_i} + B_{ik} r_{i2}^3 e^{r_{i2} z_i} + C_{ik} r_{i3}^3 e^{r_{i3} z_i} + D_{ik} r_{i4}^3 e^{r_{i4} z_i} + \\ & + \left(\nu_{21}^i - \frac{a_{33}^i}{a_{11}^i} \right) \lambda_k^2 \left(A_{ik} r_{i1} e^{r_{i1} z_i} + B_{ik} r_{i2} e^{r_{i2} z_i} + C_{ik} r_{i3} e^{r_{i3} z_i} + \right. \\ & + \left. D_{ik} r_{i4} e^{r_{i4} z_i} \right) + \frac{8b_i}{\lambda_k} \left[\nu_{21}^i \rho_i \right] \sin \frac{\lambda_k}{2} = \frac{a_{11}^{i+1}}{a_{11}^i} \times \\ & \times \left\{ A_{i+1,k} r_{i+1,1}^3 e^{r_{i+1,1} z_i} + B_{i+1,k} r_{i+1,1}^2 e^{r_{i+1,1} z_i} (r_{i+1,1} z_i + 3) + C_{i+1,k} r_{i+1,3}^3 e^{r_{i+1,3} z_i} + \right. \\ & + D_{i+1,k} r_{i+1,3}^2 e^{r_{i+1,3} z_i} (r_{i+1,3} z_i + 3) + \left(\nu_{21}^{i+1} - \frac{a_{33}^{i+1}}{a_{11}^{i+1}} \right) \lambda_k^2 \left[A_{i+1,k} r_{i+1,1} e^{r_{i+1,1} z_i} + \right. \\ & + B_{i+1,k} e^{r_{i+1,1} z_i} (r_{i+1,1} z_i + 1) + C_{i+1,k} r_{i+1,3} e^{r_{i+1,3} z_i} + D_{i+1,k} r_{i+1,3} e^{r_{i+1,3} z_i} \times \\ & \left. \left. \times (r_{i+1,3} z_i + 1) \right] + \frac{8b_{i+1}}{\lambda_k} \left[\nu_{21}^{i+1} \rho_{i+1} \right] \sin \frac{\lambda_k}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Для того, чтобы соблюдались граничные условия (25) $u^m = 0$; $w^m = 0$ и при этом были равны нулю правые части выражений (45) и (46), при $i = m$, $z = h$, необходимо выполнение следующих равенств:

$$U_{mo}(h) = 0; \quad U_{mk}(h) = 0; \quad k = 1, \infty \quad (55)$$

И

$$U'_{mo}(h) = 0; \quad U'_{mk}(h) - \lambda_k \chi_{3k}^m(h) = 0; \quad k = 1, \infty. \quad (56)$$

Предполагаем, что нижний слой выполнен из изотропного материала. Тогда равенства (55) и (56) соответственно примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & 3A_{mo} h + B_{mo} + 2\nu_{21}^m \rho_m b_m h_m = 0; \\ & A_{mk} r_{m1}^2 e^{r_{m1} h} + B_{mk} r_{m1} e^{r_{m1} h} (r_{m1} h + 2) + C_{mk} r_{m3}^2 e^{r_{m3} h} + D_{mk} r_{m3} e^{r_{m3} h} (r_{m3} h + 2) + \\ & + \nu_{21}^m \lambda_k^2 \left(A_{mk} e^{r_{m1} h} + B_{mk} h e^{r_{m1} h} + C_{mk} e^{r_{m3} h} + D_{mk} h e^{r_{m3} h} \right) + \\ & + \frac{8}{\lambda_k} b_m \left(\nu_{21}^m \rho_m h_m \right) \sin \frac{\lambda_k}{2} = 0; \quad \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty \end{aligned} \quad (57)$$

И

$$\begin{aligned} & 3A_{mo} + 2\nu_{21}^m \rho_m b_m = 0; \\ & A_{mk} r_{m1}^3 e^{r_{m1} h} + B_{mk} r_{m1}^2 e^{r_{m1} h} (r_{m1} h + 3) + C_{mk} r_{m3}^3 e^{r_{m3} h} + D_{mk} r_{m3}^2 e^{r_{m3} h} (r_{m3} h + 3) + \\ & + \lambda_k^2 \left(\nu_{21}^m - \frac{a_{33}^m}{a_{11}^m} \right) \left[A_{mk} r_{m1} e^{r_{m1} h} + B_{mk} e^{r_{m1} h} (r_{m1} h + 1) + C_{mk} r_{m3} e^{r_{m3} h} + \right. \\ & + \left. D_{mk} e^{r_{m3} h} (r_{m3} h + 1) \right] + \frac{8b_m}{\lambda_k} \left[\nu_{21}^m \rho_m \right] \sin \frac{\lambda_k}{2} = 0; \\ & \lambda_k = k\pi; \quad k = 1, \infty. \end{aligned} \quad (58)$$

Максимальный прогиб многослойной системы под нагрузкой возникает в начале координат. Полагая $x = 0, z = 0, i = 1$ из выражения (46) получим:

$$\begin{aligned} w_{\max} = & \frac{1}{2bE_1^{(1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left\{ A_{1k} r_{11}^3 + B_{1k} r_{12}^3 + C_{1k} r_{13}^3 + D_{1k} r_{14}^3 + \right. \\ & \left. + \lambda_k^2 \left(\nu_{21}^{(1)} - \frac{E_1^{(1)}}{G_{12}^{(1)}} \right) (A_{1k} r_{11} + B_{1k} r_{12} + C_{1k} r_{13} + D_{1k} r_{14}) \right\} + \\ & + \frac{8b}{\lambda_k} \left[\nu_{21}^{(1)} \rho_1 \right] \sin \frac{\lambda_k}{2}; \quad \lambda_k = k\pi. \end{aligned} \quad (59)$$

Выражение (59) получено для системы, верхний слой которой ортотропный. Если верхний слой выполнен из изотропного материала, то выражение (59) изменится и принимает вид:

$$\begin{aligned} w_{\max} = & \frac{1}{2bE_1^{(1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left\{ A_{1k} r_{11}^3 + 3B_{1k} r_{11}^2 + C_{1k} r_{13}^3 + 3D_{1k} r_{13}^2 + \right. \\ & \left. + \lambda_k^2 \left(\nu_{21}^{(1)} - \frac{E_1^{(1)}}{G_{12}^{(1)}} \right) (A_{1k} r_{11} + B_{1k} + C_{1k} r_{13} + D_{1k}) \right\} + \\ & + \frac{8b}{\lambda_k} \left[\nu_{21}^{(1)} \rho_1 \right] \sin \frac{\lambda_k}{2}; \quad \lambda_k = k\pi. \end{aligned} \quad (60)$$

Расчет двухслойной конструкции

Calculation of two-layer structure

Рассмотрим двухслойную систему: верхний слой армирован объёмной георешеткой, нижний — без армирования (рис. 3). Для верхнего слоя используем модель ортотропного тела, а для нижнего — изотропного.

Заменим физические постоянные — податливости $a_{11}^i, \dots, a_{33}^i$, техническими постоянными — модулями упругости и коэффициентами Пуассона:

$$a_{11}^i = \frac{1}{E_1^i}; \quad a_{22}^i = \frac{1}{E_2^i}; \quad a_{12}^i = -\frac{\nu_{12}^i}{E_2^i} = -\frac{\nu_{21}^i}{E_1^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{G_{12}^i}. \quad (61)$$

Здесь E_1^i, E_2^i — модули упругости i -го слоя в направлении осей x, z соответственно; ν_{12}^i — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение i -го слоя в направлении оси x при растяжении в направлении оси z ; ν_{21}^i — то же, в направлении оси z при растяжении в направлении оси x ; G_{12}^i — модуль сдвига i -го слоя, определяемый из испытания на срез в продольном сечении, нормальном к оси z ; G_{21}^i — то же, в поперечном сечении нормальном к оси x ; α_{i1}, α_{i2} — коэффициенты линейного температурного расширения i -го слоя в направлении осей x, z соответственно.

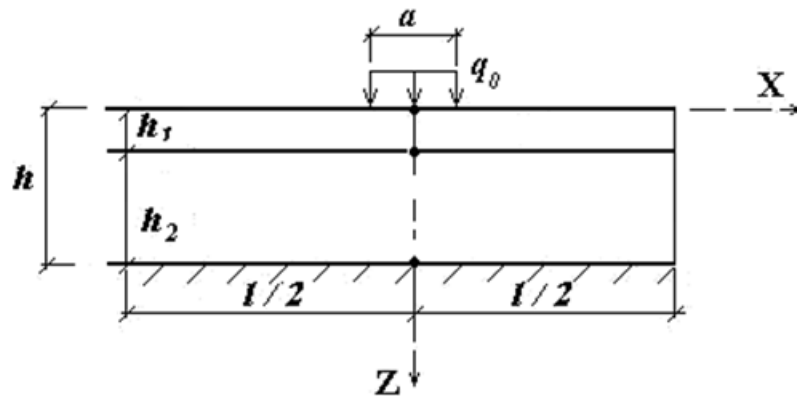


Рисунок 3. Расчетная схема двухслойной конструкции (расчетная схема составлена авторами)

Figure 3. Two-layer structure design diagram (calculation scheme made by the authors)

Для изотропного слоя справедливы следующие равенства:

$$E_1^i = E_2^i = E^i; \quad \nu_{21}^i = \nu^i; \quad G_{12}^i = G^i = \frac{E^i}{2(1+\nu^i)}. \quad (62)$$

Для представленной на рисунке двухслойной системы имеем 12 неизвестных постоянных $A_{i0}, B_{i0}, A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, D_{ik}$, ($i=1,2$), которые будем определять из 12 уравнений, полученных из условий (23)–(25).

Первую группу из четырех уравнений для определения постоянных $A_{10}, B_{10}, A_{20}, B_{20}$ получим из равенств (48) и (52), в которых принимаем $i=1$, $i+1=2$, и первых выражений (57) и (58), в которых принимаем $m=2$.

Из полученных уравнений находим постоянные $A_{10}, B_{10}, A_{20}, B_{20}$:

$$\begin{aligned} A_{10} &= -\frac{2}{3} \nu_{21}^{(1)} \rho_1 b; & A_{20} &= -\frac{2}{3} \nu_{21}^{(2)} \rho_2 b; \\ B_{10} &= 0; & B_{20} &= 2 \nu_{21}^{(2)} \rho_2 b h_1. \end{aligned} \quad (63)$$

Если при расчете не учитывать собственный вес конструкции, то постоянные A_{10}, A_{20}, B_{20} равны нулю.

Вторую группу из восьми уравнений для определения постоянных $A_{1k}, B_{1k}, C_{1k}, D_{1k}, A_{2k}, B_{2k}, C_{2k}, D_{2k}$ получим из выражений (32)–(35), (50), (54), (57.2), (58.2), полагая в них $i=1$, $m=2$. Данную группу представим в виде системы линейных алгебраических уравнений, решение которой дает значения искомых постоянных.

Рассмотрим пример расчета на статическую нагрузку. Собственный вес конструкции не учитываем.

Исходные данные:

$$l = 2\text{ м}; \quad b = 1\text{ м}; \quad a = 0,1\text{ м}; \quad h_1 = 0,2\text{ м}; \quad h_2 = 1\text{ м}; \quad q_0 = 100\text{ кН/м}^2.$$

Числовые значения упругих постоянных верхнего армированного слоя ($i = 1$) вычислены по методике, изложенной в работе [1]:

$$E_1^{(1)} = 41298,4 \text{ кПа}; E_2^{(1)} = 46185,1 \text{ кПа}; G_{12}^{(1)} = 15895 \text{ кПа}; \nu_{12}^{(1)} = 0,315.$$

Числовые значения упругих постоянных нижнего изотропного слоя ($i = 2$).

$$E^{(2)} = 40000 \text{ кПа}; \nu^{(2)} = 0,35; G^{(2)} = 14814,8 \text{ кПа}.$$

Решая задачу при исходных данных, представленных выше, получим числовые значения максимальных прогибов при различном количестве членов ряда. Графическое изображение результатов вычислений приведено на рисунке 4, где представлены кривые с характерными точками, показывающими значения прогибов двухслойной системы с общей толщиной слоев $h = 1,2 \text{ м}$ (нижняя кривая) и однослойной системы из изотропного материала такой же толщины (верхняя кривая).

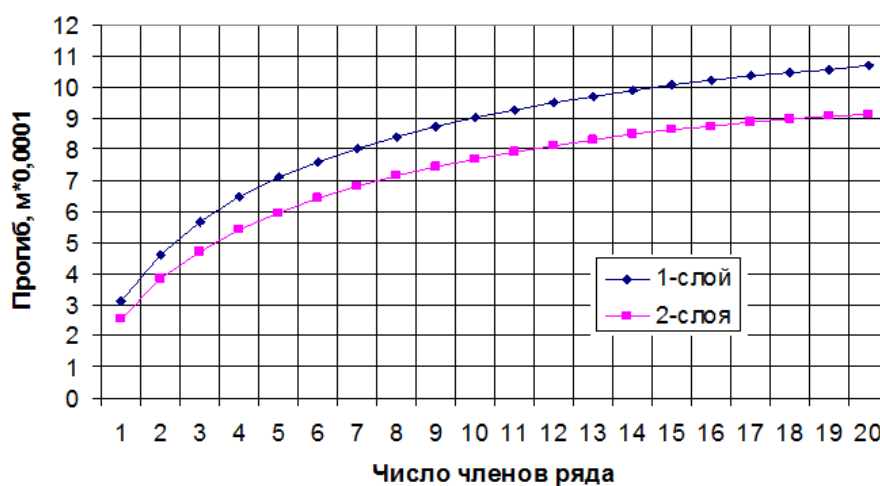


Рисунок 4. Зависимость максимальных прогибов двухслойной системы от числа членов ряда (рисунок составлен авторами)

Figure 4. Dependence of the maximum deflections of the two-layer system on the number of terms of the series (figure compiled by the authors)

Заключение

Conclusion

Сравнительный анализ двух кривых показывает, что максимальный прогиб двухслойной системы на 16 % ниже прогиба однослойной. Другими словами: вычисленный эффект от армирования верхнего слоя упругого полупространства объёмной георешеткой при вышеприведенных исходных данных достигает 16 %. Этот результат качественно соответствует результатам натурных испытаний песчаного слоя основания, укрепленного

георешеткой. Так, на основании проведенных опытов было установлено, что общий модуль упругости армированной конструкции основания составляет 72 МПа, при заполнении георешетки песком с модулем упругости 60 МПа. При этом эффект армирования песчаного основания георешеткой с заполнением тем же материалом основания, согласно экспериментальным данным, составляет 20 % [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Матвеев, С.А.** Армированные дорожные конструкции: моделирование и расчет / С.А. Матвеев, Ю.В. Немировский; Югорский государственный университет, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН. — Новосибирск Новосибирское отделение издательства "Наука", 2006. — 348 с. — URL: <https://cloud.mail.ru/public/QuFm/eVsdEUtW5>. — EDN: ANEGGX. (дата обращения: 26.09.2023).
2. **Ziegler, M.** Application of Geogrid Reinforced Constructions: History, Recent and Future Developments / M. Ziegler. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.015> // Procedia Engineering. — 2017. — Т 172. — С. 42–51. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705817305210>. (дата обращения: 26.09.2023).
3. **Chen, Q.** Performance evaluation of full-scale geosynthetic reinforced flexible pavement / Q. Chen, S. Hanandeh, M. Abu-Farsakh, L. Mohammad. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.17.00031> // Geosynthetics International. — 2018. — Т 25. — № 1. — С. 26–36. — URL: <https://www.icvirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.17.00031>. (дата обращения: 26.09.2023).
4. **Sun, X.** Mechanistic-empirical analysis of geogrid-stabilized layered systems: Part I. Solutions / X. Sun, J. Han. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.19.00006> // Geosynthetics International. — 2019. — Т 26. — № 3. — С. 273–285. — URL: <https://www.icvirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.19.00006>. (дата обращения: 26.09.2023).
5. **Sun, X.** Mechanistic-empirical analysis of geogrid-stabilized layered systems: Part II. Analysis / X. Sun, J. Han. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.19.00007> // Geosynthetics International. — 2019. — Т 26. — № 3. — С. 286–296. — URL: <https://www.icvirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.19.00007>. (дата обращения: 26.09.2023).
6. **Rakowski, Z.** An Attempt of the Synthesis of Recent Knowledge About Mechanisms Involved in Stabilization Function of Geogrids in Infrastructure Constructions / Z. Rakowski. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.027> // Procedia Engineering. — 2017. — Т 189. — С. 166–173. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705817321483>. (дата обращения: 26.09.2023).
7. **Матвеев, С.А.** Влияние армирования на величину упругого прогиба дискретного основания дорожной одежды / С.А. Матвеев, Е.А. Мартынов, Н.Н. Литвинов. — DOI [https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-6\(58\)-98-106](https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-6(58)-98-106) // Научный рецензируемый журнал "Вестник СибАДИ". — 2017. — № 6. — С. 98–106. — URL: <https://vestnik.sibadi.org/jour/article/view/514>. — EDN YNHMXT. (дата обращения: 26.09.2023).
8. **Александров, А.С.** Распределяющая способность песчаных грунтов, армированных геосинтетикой / А.С. Александров, А.Л. Калинин, М.В. Цыгулева. — DOI <https://doi.org/10.5862/MCE.66.4> // Magazine of Civil Engineering. — 2016. — № 6. — С. 35–48. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27662856>. — EDN XHIZVZ. (дата обращения: 26.09.2023).
9. **Матвеев, С.А.** Модель армированного георешеткой щебеночного основания дорожной одежды / С.А. Матвеев, Е.А. Мартынов, Н.Н. Литвинов, Г.М. Кадисов, В.А. Уткин. — DOI <https://doi.org/10.18720/MCE.94.3> // Magazine of Civil Engineering. — 2020. — № 2. — С. 21–30. — URL: <https://www.engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.94.03/>. — EDN WYVDBR. (дата обращения: 26.09.2023).

10. **Tang, X.** Evaluation of geogrids for stabilising weak pavement subgrade / X. Tang, G.R. Chehab, A. Palomino. — DOI <https://doi.org/10.1080/10298430802279827> // International Journal of Pavement Engineering. — 2008. — Т 9. — № 6. — С. 413–429. — URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10298430802279827>. (дата обращения: 26.09.2023).
11. **Kongkitkul, W.** Effects of temperature on the rupture strength and elastic stiffness of geogrids / W. Kongkitkul, W. Tabsombut, C. Jaturapitakkul, F. Tatsuoka. — DOI <https://doi.org/10.1680/gein.2012.19.2.106> // Geosynthetics International. — 2012. — Т 19. — № 2. — С. 106–123. — URL: <https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/gein.2012.19.2.106>. (дата обращения: 07.10.2023).
12. **Chantachot, T.** Effects of temperature rise on load-strain-time behaviour of geogrids and simulations / T. Chantachot, W. Kongkitkul, F. Tatsuoka. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.18.00008> // Geosynthetics International. — 2018. — Т 25. — № 3. — С. 287–303. — URL: <https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.18.00008>. (дата обращения: 07.10.2023).
13. **Cardile, G.** Tensile behaviour of an HDPE geogrid under cyclic loading: experimental results and empirical modelling / G. Cardile, N. Moraci, M. Pisano. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.16.00019> // Geosynthetics International. — 2017. — Т 24. — № 1. — С. 95–112. — URL: <https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.16.00019>. (дата обращения: 07.10.2023).
14. **Bathurst, R.J.** Geogrid pullout load-strain behaviour and modelling using a transparent granular soil / R.J. Bathurst, F.M. Ezzein. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.15.00051> // Geosynthetics International. — 2016. — Т 23. — № 4. — С. 271–286. — URL: <https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.15.00051>. (дата обращения: 07.10.2023).
15. **Liu, F.-Y.** Cyclic and post-cyclic behaviour from sand-geogrid interface large-scale direct shear tests / F.-Y. Liu, P. Wang, X. Geng, J. Wang, X. Lin. — DOI <https://doi.org/10.1680/jgein.15.00037> // Geosynthetics International. — 2016. — Т 23. — № 2. — С. 129–139. — URL: <https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgein.15.00037>. (дата обращения: 07.10.2023).
16. **Шуваев, А.Н.** Расчет дорожных одежд, армированных объемными георешетками / А.Н. Шуваев, М.В. Панова, С.А. Куюков, С.П. Санников // Наука и техника в дорожной отрасли. — 2003. — № 3. — С. 18–20. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18901571>. — EDN PXQFAZ. (дата обращения: 07.10.2023).
17. **Bathurst, R.J.** Large-Scale Triaxial Compression Testing of Geocell-Reinforced Granular Soils / R.J. Bathurst, R. Karpurapu. — DOI <https://doi.org/10.1520/GTJ10050J> // Geotechnical Testing Journal. — 1993. — Т 16. — № 3. — С. GTJODJ. — URL: <https://www.astm.org/gtj10050j.html>. (дата обращения: 07.10.2023).
18. **Мерзликин, А.Е.** Геопластики в дорожной одежде / А.Е. Мерзликин. // Труды Союздорнии. Применение геосинтетики и геопластиков при строительстве и ремонте автомобильных дорог. Вып. 196. / Москва: Б.И., 1998. — С. 70–74.
19. **Матвеев, С.А.** Моделирование и расчет армированного основания из зернистых материалов / С.А. Матвеев, Е.А. Мартынов, Н.Н. Литвинов // Известия высших учебных заведений. Строительство. — 2017. — № 10. — С. 14–22. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32393370>. — EDN NQLFYF. (дата обращения: 07.10.2023).
20. **Матвеев, С.А.** Свойства упругого слоя основания, армированного объемной георешеткой / С.А. Матвеев, Ю.В. Немировский // Наука и техника в дорожной отрасли. — 2005. — № 2. — С. 24–28. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18923969>. — EDN PYCYJP. (дата обращения: 07.10.2023).

Сведения об авторах:

Матвеев Сергей Александрович — доктор технических наук, профессор, профессор, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет», Омск, Россия,
e-mail: dfsibadi@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7362-0399>
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=160019
WoS: <https://www.webofscience.com/wos/author/rid/Y-3137-2018>
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56297305000>

Боброва Татьяна Викторовна — доктор технических наук, профессор, профессор, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет», Омск, Россия,
e-mail: bobrova.tv@gmail.com
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=505056
WoS: <https://www.webofscience.com/wos/author/rid/Y-3916-2018>
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57201362187>

Столбов Юрий Викторович — доктор технических наук, профессор, профессор, ФГБОУ ВО «Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина», Омск, Россия,
e-mail: yuv.stolbov@omgau.org
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=443580
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57205442132>

Статья получена: 03.12.2023. Принята к публикации: 11.02.2024. Опубликовано онлайн: 26.02.2024.

REFERENCES

1. Matveev S.A., Nemirovsky J.V. The reinforced road designs: modelling and calculation. Novosibirsk: Science; 2006. Available at: <https://cloud.mail.ru/public/QuFm/eVsdEUtW5> (accessed 26th September 2023). (In Russ.).
2. Ziegler M. Application of Geogrid Reinforced Constructions: History, Recent and Future Developments. *Procedia Engineering*. 2017; 172: 42–51. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.015>.
3. Chen Q., Hanandeh S., Abu-Farsakh M., Mohammad L. Performance evaluation of full-scale geosynthetic reinforced flexible pavement. *Geosynthetics International*. 2018; 25(1): 26–36. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.17.00031>.
4. Sun X., Han J. Mechanistic-empirical analysis of geogrid-stabilized layered systems: Part I. Solutions. *Geosynthetics International*. 2019; 26(3): 273–285. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.19.00006>.
5. Sun X., Han J. Mechanistic-empirical analysis of geogrid-stabilized layered systems: Part II. Analysis. *Geosynthetics International*. 2019; 26(3): 286–296. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.19.00007>.
6. Rakowski Z. An Attempt of the Synthesis of Recent Knowledge About Mechanisms Involved in Stabilization Function of Geogrids in Infrastructure Constructions. *Procedia Engineering*. 2017; 189: 166–173. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.027>.
7. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov the Influence of The Reinforcing Process on The Discrete Basis of Pavement Deflection. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2017; (6): 98–106. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: [https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-6\(58\)-98-106](https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-6(58)-98-106).
8. Aleksandrov A.S., Kalinin A.L., Tsyguleva M.V. Distribution capacity of sandy soils reinforced with geosynthetics. *Magazine of Civil Engineering*. 2016; (6): 35–48. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.5862/MCE.66.4>.
9. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov N.N., Kadisov G.M., Utkin V.A. The geogrid-reinforced gravel base pavement model. *Magazine of Civil Engineering*. 2020; (2): 21–30. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.18720/MCE.94.3>.
10. Tang X., Chehab G.R., Palomino A. Evaluation of geogrids for stabilising weak pavement subgrade. *International Journal of Pavement Engineering*. 2008; 9(6): 413–429. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1080/10298430802279827>.
11. Kongkitkul W., Tabsombut W., Jaturapitakkul C., Tatsuoka F. Effects of temperature on the rupture strength and elastic stiffness of geogrids. *Geosynthetics International*. 2012; 19(2): 106–123. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.2012.19.2.106>.
12. Chantachot T., Kongkitkul W., Tatsuoka F. Effects of temperature rise on load-strain-time behaviour of geogrids and simulations. *Geosynthetics International*. 2018; 25(3): 287–303. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.18.00008>.

13. Cardile G., Moraci N., Pisano M. Tensile behaviour of an HDPE geogrid under cyclic loading: experimental results and empirical modelling. *Geosynthetics International*. 2017; 24(1): 95–112. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.16.00019>.
14. Bathurst R.J., Ezzein F.M. Geogrid pullout load–strain behaviour and modelling using a transparent granular soil. *Geosynthetics International*. 2016; 23(4): 271–286. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.15.00051>.
15. Liu F.-Y., Wang P., Geng X., Wang J., Lin X. Cyclic and post-cyclic behaviour from sand-geogrid interface large-scale direct shear tests. *Geosynthetics International*. 2016; 23(2): 129–139. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1680/jgein.15.00037>.
16. Shuvayev A.N., Panova M.V., Kuyukov S.A., Sannikov S.P. [Calculation of road pavements reinforced with volumetric geogrids]. *Advanced Science and Technology for Highways*. 2003; (3): 18–20. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18901571> (accessed 7th October 2023). (In Russ.).
17. Bathurst R.J., Karpurapu R. Large-Scale Triaxial Compression Testing of Geocell-Reinforced Granular Soils. *Geotechnical Testing Journal*. 1993; 16(3): GTJODJ. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10050J>.
18. Merzlikin A.E. Geoplastiki v dorozhnoy odezhdе [Geoplastics in road pavement]. In: Trudy Soyuzdornii. Primeneniye geosintetiki i geoplastikov pri stroitel'stve i remonte avtomobil'nykh dorog. Vyp. 196. [Proceedings of Soyuzdornia. The use of geosynthetics and geoplastics in the construction and repair of highways. Issue 196.]. Moscow: 1998. p. 70–74.
19. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov N.N. Modelling and Calculation of The Reinforced Basis from Granular Materials. *News of higher educational institutions. Construction*. 2017; (10): 14–22. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32393370> (accessed 7th October 2023). (In Russ., abstract in Eng.).
20. Matveyev S.A., Nemirovskiy Yu.V. [Properties of the elastic base layer reinforced with a volumetric geogrid]. *Advanced Science and Technology for Highways*. 2005; (2): 24–28. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18923969> (accessed 7th October 2023). (In Russ.).

Information about the authors:

Sergey A. Matveev — Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russia,

e-mail: dfsibadi@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7362-0399>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=160019

WoS: <https://www.webofscience.com/wos/author/rid/Y-3137-2018>

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56297305000>

Tatyana V. Bobrova — Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russia,

e-mail: bobrova.tv@gmail.com

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=505056

WoS: <https://www.webofscience.com/wos/author/rid/Y-3916-2018>

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57201362187>

Yury V. Stolbov — Omsk State Agrarian University named after P.A. Stolypin, Omsk, Russia,

e-mail: yuv.stolbov@omgau.org

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=443580

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57205442132>

Submitted: 3rd December 2023. Revised: 11th February 2024. Published online: 26th February 2024.