

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2023, Том 10, № 4 / 2023, Vol. 10, Iss. 4 <https://t-s.today/issue-4-2023.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/09SATS423.pdf>

DOI: 10.15862/09SATS423 (<https://doi.org/10.15862/09SATS423>)

2.1.9. Строительная механика (технические науки)

Критерий прочности бетона для двух- и трехосного напряженного состояния

Агапов В.П., Маркович А.С.

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», Москва, Россия

Автор, ответственный за переписку: Маркович Алексей Семенович, e-mail: markovich-as@rudn.ru

Аннотация. На основании проведенных авторами экспериментов разработан критерий прочности бетона, позволяющий учитывать двух- и трехосное напряженное состояние при прочностных расчетах массивных бетонных и железобетонных конструкций. Разработанный критерий прочности адаптирован к пространственному восьмиузловому конечному элементу (сплошного типа) и реализован в программе ПРИНС. Для проверки разработанного критерия в работе проведено сравнение как с экспериментальными данными, так и с результатами расчетов по другим широко применяемым для бетонов критериям прочности. Таким образом, для проверки предлагаемого критерия в условиях трехосного сжатия результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными, а также с критерием Виллама-Варнке и модифицированным критерием Друкера-Прагера. Сравнение показывает, что в режиме низких гидростатических напряжений ($\sigma_{окT}/R_b < 1$) результаты по указанным критериям сходятся как между собой, так и с опытными данными. В

режиме средних гидростатических напряжений ($1 \leq \sigma_{окT}/R_b \leq 2$) предложенный авторами критерий и критерий Виллама-Варнке показывают близкие результаты, тогда как модифицированный критерий Друкера-Прагера, напротив, дает на 20 % завышенное значение прочности бетона.

Сравнение результатов двухосных испытаний бетонов показывает хорошую согласованность с разработанным авторами критерием. Так, для тяжелых крупнозернистых бетонов расхождения в значениях прочности составили не более 3,5 %, для тяжелого мелкозернистого бетона и керамзитобетона — не более 4 %.

Ключевые слова: критерий прочности бетона; критерий Друкера-Прагера; критерий Виллама-Варнке; метод конечных элементов; вычислительный комплекс ПРИНС; строительные конструкции; массивные железобетонные конструкции; физическая нелинейность; механика деформируемых тел

Concrete strength criteria for biaxial and triaxial state of stress

Vladimir P. Agapov, Alexey S. Markovich

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia

Corresponding author: Alexey S. Markovich, e-mail: markovich-as@rudn.ru

Abstract. Based on the experiments conducted by the authors, a concrete strength criteria has been developed, which allows us to take into account biaxial and triaxial states of stress in strength calculations of massive concrete and reinforced concrete structures. The developed strength criteria is adapted to a spatial eight-node finite element (solid type) and implemented in the PrinCe programme. In order to conduct the developed criteria operational check, both experimental data and calculation results of other widely used strength criteria for concrete were compared. Thus, to verify the proposed criteria under triaxial compression, the calculation results were compared with experimental data as well as with the Willam-Warnke criterion and the modified Drucker-Prager criterion. The comparison shows that in the low hydrostatic stresses ($\sigma_{okT}/R_b < 1$) mode results of the above criteria converge both with each other and with the

experimental data. In the medium hydrostatic stress mode ($1 \leq \sigma_{okT}/R_b \leq 2$), the criteria proposed by the authors and the Willam-Warnke criterion show close results, while the modified Drucker-Prager criterion, on the contrary, gives 20 % overestimation of concrete strength.

Comparison of the results of concrete biaxial tests shows good agreement with the criteria developed by the authors. Thus, for heavy coarse concrete the differences in strength values were not more than 3,5 %, for heavy fineconcrete and expanded clay concrete — not more than 4 %.

Keywords: concrete strength criteria; Drucker-Prager criterion; Willam-Warnke criterion; finite element method; PrinCe computer system; building structures; massive reinforced concrete structures; physical nonlinearity; mechanics of deformable bodies

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons “Attribution” («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons “Attribution” 4.0 Global License



Введение

Introduction

Расчеты бетонных и железобетонных конструкций транспортных сооружений на прочность следует производить с учетом объемного напряженного состояния численными методами, методом конечных элементов [1; 2], в частности. При построении конечно-элементных моделей должны использоваться достоверные, проверенные экспериментальным путем, критерии прочности.

Проблема построения феноменологических теорий прочности бетона и их анализ проведен в работах [3–5].

Однако, на наш взгляд невозможно сугубо теоретическим путем построить работоспособный критерий прочности бетона, отвечающий случаю двух- и трехосного сжатия. Поэтому для разработки такого критерия авторами использовались экспериментально-теоретические методы.

Предложен шестипараметрический критерий прочности бетона, адаптированный к объемному конечному элементу (тип solid). Указанный критерий прочности прошел экспериментальную проверку и реализован в вычислительном комплексе ПРИНС.

1. Методы

1. Methods

Исследованию прочности и деформаций бетонных и железобетонных элементов под действием двух- и трехосного напряженного состояния посвящено большое количество работ, например, [6–11]. Авторы указанных работ использовали различную методику проведения экспериментов и разное метрологическое оборудование. В связи с этим наблюдается значительный разброс в экспериментальных данных.

Однако, достоверные испытания бетона на неравномерное трехосное сжатие довольно дорогостоящие. Для их проведения необходимо изготавливать специальный испытательный стенд, дающий возможность в дополнении к осевому нагружению обеспечивать в разных режимах требуемое боковое обжатие образцов.¹

¹ Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при не одноосных напряженных состояниях. — М.: НИИЖБ, 1985.

Авторы настоящей работы проводили трехосные испытания бетона в условиях равномерного бокового обжатия образцов. Для этих целей были изготовлены серии образцов, тело бетона которых заключалось в стальную обойму. Для регулирования величины бокового обжатия бетона применялись стальные обоймы различного диаметра с разной высотой и толщиной стенки.

Для регулирования величины бокового обжатия бетона применялись стальные обоймы различного диаметра с разной высотой и толщиной стенки.

Так, использовались обоймы диаметром 114, 127, 150, 159 мм и высотой 90, 140, 250, 288 мм. В общей сложности было изготовлено 19 образцов.

Среднее значение прочности бетона на одноосное сжатие определялось на образцах-цилиндрах диаметром 150 мм и высотой 300 мм и составило $R_b = 57$ МПа.

Напряженно-деформированное состояние образцов исследовалось при помощи тензорезисторов ВХ 120-5АА сопротивлением 120 Ом, наклеенных на стальную обойму.

Эксперименты проводились на испытательной установке Matest (рис. 1).

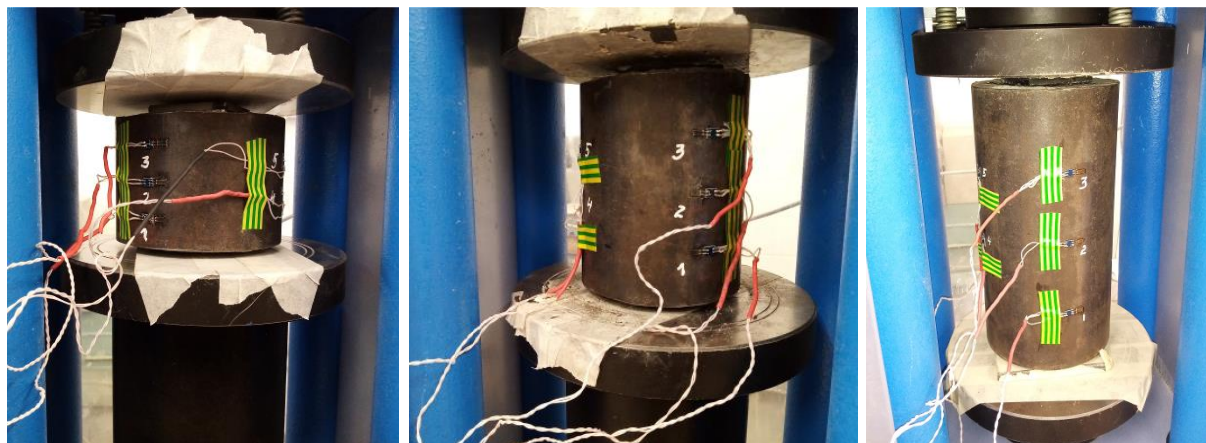


Рисунок 1. Общий вид образцов (разработано авторами)

Figure 1. General view of the specimens (developed by the authors)

В процессе экспериментов прикладываемая на образцы нагрузка и деформации стальной обоймы регистрировались синхронно, что, в итоге, позволило получить полную картину напряженно-деформированного состояния каждого образца.

Испытания проводились с постоянной скоростью нагружения 2 кН/с. Критерием разрушения образцов являлось падение величины прикладываемой нагрузки N до 60 % от пикового значения.

По результатам экспериментов определялась нормируемая прочность бетона, выраженная через напряжения на октаэдрических площадках $\sigma_{окТ}/R_b$ и $\tau_{окТ}/R_b$ (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Результаты экспериментов авторов

Authors test results

№ п.п. Ordinal number	Марка образца Specimen grade	Нормируемая прочность бетона Normalizable concrete strength	
		$\sigma_{окТ}/R_b$	$\tau_{окТ}/R_b$
1	C16.9-3	0,953	1,025
2	C13.9-3	1,169	1,249
3	C11.9-3	1,429	1,571
4	C16.9-4	1,293	1,398
5	C13.9-4	1,588	1,709
6	C11.9-4	1,953	2,162
7	C16.14-3	1,068	1,187
8	C13.14-3	1,160	1,235
9	C11.14-3	1,251	1,318
10	C16.14-4	1,445	1,613
11	C13.14-4	1,533	1,628
12	C11.14-4	1,653	1,738
13	C16.25-3	1,132	1,278
14	C13.25-3	1,160	1,237
15	C11.25-3	1,274	1,351
16	C16.25-4	1,613	1,850
17	C13.25-4	1,533	1,628
18	C11.25-4	1,720	1,832
19	C15.28-4	1,273	1,380

Разработано авторами / Developed by the authors

Характер разрушения образцов (рис. 2) свидетельствует о том, что в условиях неравномерного трехосного сжатия бетону присущ явно выраженный пластический характер деформирования. Данное обстоятельство наблюдается при значениях гидростатических напряжений $\sigma_0 > 2R_b$. К аналогичным выводам пришли исследователи в работах [12].



Рисунок 2. Характер разрушения образцов (разработано авторами)

Figure 2. Specimens fracture mode (developed by the authors)

Откуда:

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2}}. \quad (3)$$

Вывод формул (1) и (3) подробно рассмотрен в монографии [13].

3. Уравнения предельной кривой в девиаторной плоскости

3. Equations of the limit curve in the deviatoric plane

Принимая допущение о бетоне как изотропном материале, в пространстве главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ поверхность разрушения будет представлять собой симметричную относительно гидростатической оси d поверхность вращения (рис. 4 а), девиаторное сечение которой представлено на рисунке 4 б.

Так как данное сечение обладает тройной симметрией, достаточно получить уравнение предельной кривой в пределах сектора $0 < \theta < \pi/3$ [14].

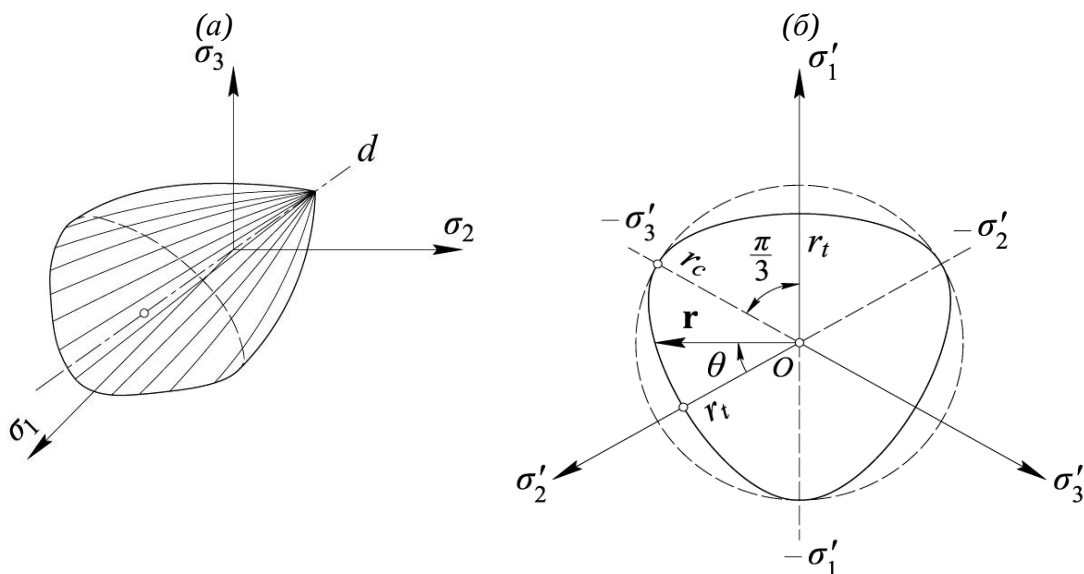


Рисунок 4. Поверхность разрушения бетона: а — вид в пространстве координат главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$; б — девиаторное сечение (разработано авторами)

Figure 4. Concrete fracture surface: a — view in the coordinate space of principal stresses; b — deviatoric section (developed by the authors)

Уравнение эллиптической кривой в пределах указанного сектора с полуосями a и b (рис. 5) имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (4)$$

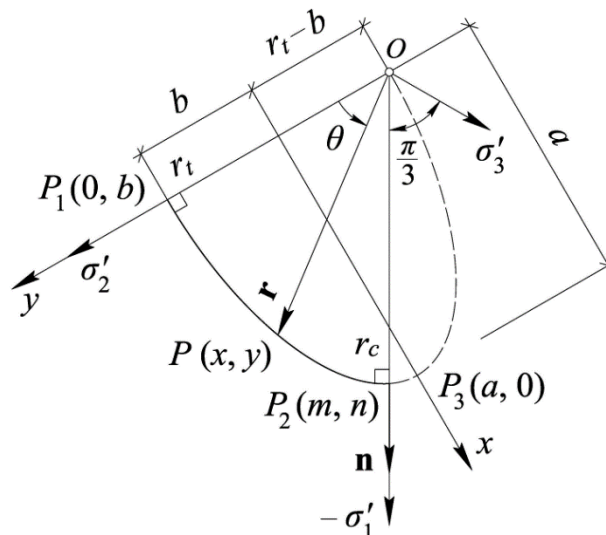


Рисунок 5. Предельная кривая в диапазоне $0 < \theta < \pi/3$ (разработано авторами)

Figure 5. Limit curve in the range $0 < \theta < \pi/3$ (developed by the authors)

Координаты вектора нормали к предельной кривой в точке $P_2(m, n)$ определяются в результате дифференцирования (4):

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{\frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}}}{\frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}}} \right\}^T = \left\{ \frac{m/a^2}{\sqrt{m^2/a^4 + n^2/b^4}}, \frac{n/b^2}{\sqrt{m^2/a^4 + n^2/b^4}} \right\}. \quad (5)$$

Согласно принятым на рисунке 5 обозначениям, длины полуосей эллипса находятся из уравнений:

$$a^2 = \frac{r_c(r_t - 2r_c)^2}{5r_c - 4r_t}, \quad b^2 = \frac{2r_t^2 - 5r_t r_c + 2r_c^2}{4r_t - 5r_c}. \quad (6)$$

Используя связь между прямоугольными и полярными координатами, получим, что:

$$x = r(\theta) \sin \theta, \quad y = r(\theta) \cos \theta - (r_t - b). \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (4), имеем:

$$\frac{[r(\theta) \sin \theta]^2}{a^2} + \frac{[r(\theta) \cos \theta - (r_t - b)]^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Опуская математические преобразования, приведем выражение для определения длины радиус-вектора $\mathbf{r}$:

$$r(\theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta + r_c(2r_t - r_c) \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}}{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2}. \quad (9)$$

Очевидно, что если в полученном уравнении принять $r_t = r_c$, то предельная кривая будет представлять собой окружность.

4. Уравнения главных меридиан поверхности разрушения

4. Equations of the prime meridians of the fracture surface

Для условия прочности бетона принята зависимость, которая выражает связь между нормальными и касательными напряжениями на октаэдрических площадках:

$$f(\sigma) = f(\sigma_{okT}, \tau_{okT}, \theta) = \frac{\sqrt{3}}{r(\sigma_{okT}, \theta)} \frac{\tau_{okT}}{R_b} - 1 = 0. \quad (10)$$

При этом меридианы растяжения ($\theta = 0$) и сжатия ($\theta = \pi/3$) поверхности разрушения описываются квадратичными функциями:

$$\bar{r}_t(\bar{\xi}) = A_0 + A_1 \bar{\xi} + A_2 \bar{\xi}^2, \text{ при } \theta = 0, \quad (11)$$

$$\bar{r}_c(\bar{\xi}) = B_0 + B_1 \bar{\xi} + B_2 \bar{\xi}^2, \text{ при } \theta = \pi/3, \quad (12)$$

где A_0, A_1, A_2 и B_0, B_1, B_2 — параметры критерия.

Таблица 2 / Table 2

Стандартные испытания бетона для определения параметров критерия

Standard concrete testing for determining the criteria parameters

Стандартные испытания бетона Standard concrete testing	σ_{okT}/R_b	τ_{okT}/R_b	Угол Angle θ
1. Одноосное сжатие 1. Uniaxial compression $\sigma_3 = -R_b, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\pi/3$
2. Одноосное растяжение 2. Uniaxial tension $\sigma_1 = R_{bt}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \bar{R}_{bt} = 1/12$	$\frac{1}{3} \bar{R}_{bt}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{R}_{bt}$	0
3. Равномерное двухосное сжатие 3. Uniform biaxial compression $\sigma_2 = \sigma_3 = -R_{bc}, \sigma_1 = 0, \bar{R}_{bc} = 1,4^*$	$-\frac{2}{3} \bar{R}_{bc}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{R}_{bc}$	0
4. Равномерное трехосное растяжение 4. Uniform triaxial tension $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \approx R_{bt}), \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$	$\sigma_{okT}/R_b = \bar{\xi}_0,$ $\bar{\xi}_0 > 0$	0	0, $\pi/3$
5. Неравномерное трехосное сжатие 5. Uneven triaxial compression $(\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3)$	$\sigma_{okT}/R_b = -\bar{\xi}_c,$ $\bar{\xi}_c > 0,$ $\tau_{okT}/R_b = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0,$ $\sigma_3 \neq 0, \bar{\xi}_c = 1,273^{**},$ $\bar{r}_c = 1,380^{**}$	$\pi/3$

* Согласно результатам экспериментов Теличко В.Г. и Зиборова Л.А. [15]; ** Согласно результатам экспериментов автора. Разработано авторами / * According to the results of experiments Telichko V.G. and Ziborova L.A. [15]; ** According to the results of the author's experiments. Developed by the authors

Чтобы определить параметры критерия A_0, A_1, A_2 и B_0, B_1, B_2 для конкретного класса бетона необходимо провести пять стандартных испытаний, приведенных в таблице 2.

На меридиане растяжения ($\theta = 0$) находятся точки, характеризующие одноосное растяжение (R_{bt}) и равномерное двухосное сжатие (R_{bc}), а на меридиане сжатия ($\theta = \pi/3$) — точки, отвечающие одноосному (R_b) и неравномерному трехосному сжатию в режиме низкой компрессии ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2$). При этом вершина поверхности разрушения соответствует точке, определяющей равномерное трехосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Используя результаты испытаний бетона, приведенные в табл. 2, каждое из уравнений (11) и (12) образует систему, состоящую из трех независимых уравнений, решение которых относительно A_0, A_1, A_2 и B_0, B_1, B_2 позволяет определить искомые параметры критерия:

$$A_1 = A_2 \bar{\xi}_0 - A_3 \bar{\xi}_0^2, \quad A_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{R}_{bt} - A_3 \left(\frac{1}{9} \bar{R}_{bt}^2 - \bar{\xi}_0^2 \right)}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3} \bar{R}_{bt}},$$
$$A_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt} \frac{\bar{\xi}_0 + \frac{2}{3} \bar{R}_{bc}}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3} \bar{R}_{bt}} \right)}{\frac{4}{9} \bar{R}_{bc}^2 - \bar{\xi}_t^2 - \left(\frac{1}{9} \bar{R}_{bt}^2 - \bar{\xi}_t^2 \right) \frac{\bar{\xi}_0 + \frac{2}{3} \bar{R}_{bc}}{\bar{\xi}_0 - \frac{1}{3} \bar{R}_{bt}}}$$
(13)

и

$$B_1 = B_2 \bar{\xi}_0 - B_3 \bar{\xi}_0^2, \quad B_2 = \frac{\bar{r}_c - B_3 \left(\bar{\xi}_c^2 - \bar{\xi}_0^2 \right)}{\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c},$$
$$B_3 = \frac{\bar{r}_c \left(3\bar{\xi}_0 + 1 \right) - \sqrt{2} \left(\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c \right)}{3 \left(\bar{\xi}_c^2 - \bar{\xi}_0^2 \right) \left(\bar{\xi}_0 + \frac{1}{3} \right) + 3 \left(\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_c \right) \left(\bar{\xi}_0^2 - \frac{1}{9} \right)}.$$
(14)

Для произвольного значения угла вида напряженного состояния θ девиаторная координата $r(\theta)$ определяется по формуле (9) в зависимости от значений $r_t = \sqrt{3} \bar{r}_t R_b$ и $r_c = \sqrt{3} \bar{r}_c R_b$. В свою очередь, координата $\xi = \sqrt{3} \bar{\xi} R_b$.

5. Модификация критерия для случая двухосного сжатия

5. Criteria modification for the biaxial compression case

Для случая равномерного и неравномерного двухосного сжатия примем $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 \geq \sigma_3$. В этом случае угол вида напряженного состояния будет вычисляться по формуле:

$$\cos \theta = \frac{-\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2\sigma_2^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2\sigma_3^2}}. \quad (15)$$

Для двухосного напряженного состояния напряжения на октаэдрических площадках определяются следующими уравнениями:

$$\sigma_{okT} = \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_3); \quad (16)$$

и

$$\tau_{okT} = \frac{1}{3}\sqrt{\sigma_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_3^2}. \quad (17)$$

Определив значение координаты $\bar{\xi} = \frac{\sigma_{okT}}{R_b}$ на гидростатической оси, соответствующие ей координаты меридиан сжатия $\bar{r}_c(\bar{\xi})$ и растяжения $\bar{r}_t(\bar{\xi})$ вычисляются по формулам (11) и (12).

В зависимости от значений девиаторов $r_c = r\left(\bar{\xi}, \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\bar{r}_c R_b$ и $r_t = r\left(\bar{\xi}, 0\right) = \sqrt{3}\bar{r}_t R_b$ можно определить по формуле (9) длину радиус-вектора $r(\bar{\xi}, \theta)$ — величину девиатора, соответствующего углу вида напряженного состояния θ .

При действии на поверхности твердого тела октаэдрических касательных напряжений, условие прочности бетона формулируется следующим образом:

$$\tau_{okT} < \frac{r(\bar{\xi}, \theta)}{\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Тем самым, условие прочности критерия, записанное по форме (18), с учетом уравнений (15)–(17) отвечает случаю равномерного и неравномерного двухосного сжатия бетона.

6. Результаты и обсуждение

6. Results and discussion

6.1 Верификация предлагаемого критерия в режиме трехосного сжатия бетона

6.1 Verification of the proposed criterion in triaxial concrete compression mode

На рисунках 6 и 7 показано сравнение меридиан сжатия ($\theta = \pi/3$) и растяжения ($\theta = 0$) разработанного критерия прочности с экспериментальными данными трехосного испытания бетона [16–18], а также с критерием Виллама-Варнке [14] и модифицированным критерием Друкера-Прагера [19] с постоянными Мора-Кулона.

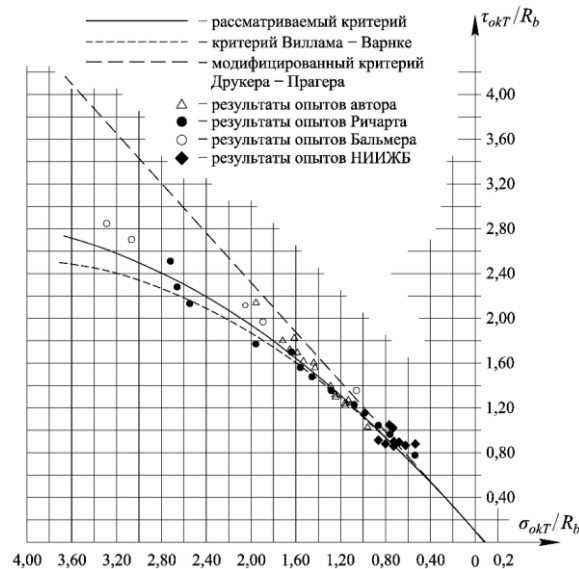


Рисунок 6. Сравнение меридиана сжатия ($\theta = \pi/3$) рассматриваемого критерия с экспериментальными данными и критериями Виллама-Варнке и Друкера-Прагера (разработано авторами)

Figure 6. Comparison of the compression ($\theta = \pi/3$) meridian of the considered criterion with the experimental data and the Willam-Warnke and Drucker-Prager criteria (developed by the authors)

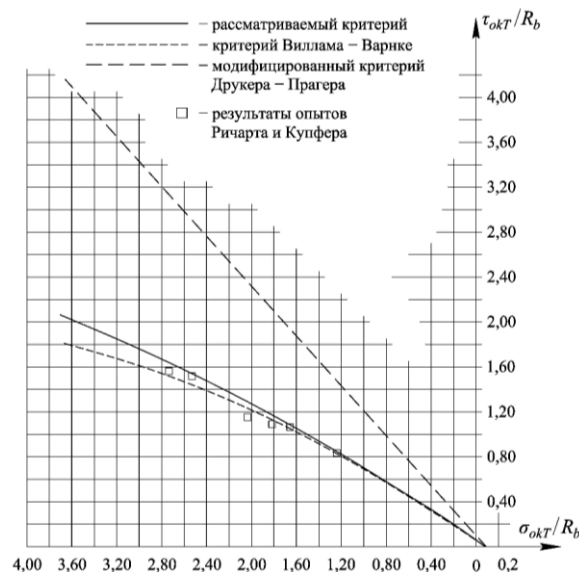


Рисунок 7. Сравнение меридиана растяжения ($\theta = 0$) рассматриваемого критерия с экспериментальными данными и критериями Виллама-Варнке и Друкера-Прагера (разработано авторами)

Figure 7. Comparison of the stretching ($\theta = 0$) meridian of the considered criterion with experimental data and Willam-Warnke and Drucker-Prager criteria (developed by the authors)

Для бетона использовались следующие параметры критерия Виллама-Варнке [14]: $\bar{R}_{bt} = 1/12$, $\bar{R}_{bc} = 1,4$, $(\sigma_0/R_b)_c = -3,67$, $(\tau_0/R_b)_c = 2,5$ и $(\sigma_0/R_b)_t = -3,67$, $(\tau_0/R_b)_t = 2,05$.

Модифицированный критерий Друкера-Прагера, выраженный через напряжения на октаэдрических площадках, записывается в виде:

$$\bar{r}(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{2}k - \sqrt{6}\alpha\bar{\xi}\sqrt{3}R_b}{\sqrt{3}R_b}. \quad (19)$$

где $\bar{\xi} = \frac{\sigma_{okT}}{R_b}$ и $\bar{r} = \frac{\tau_{okT}}{R_b}$.

Параметры критерия Друкера-Прагера, связанные с постоянными Мора-Кулона (сцепление c и угол внутреннего трения φ), определяются выражениями:

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}, \quad k = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}, \quad \bar{\xi}_0 = \frac{k}{3\alpha R_b}. \quad (20)$$

В свою очередь, постоянные Мора-Кулона для бетона находятся из условий:

$$\sin\varphi = \frac{m-1}{m+1}, \quad c = \frac{R_b(1-\sin\varphi)}{2\cos\varphi}, \quad m = \frac{1}{R_{bt}}. \quad (21)$$

Сравнение меридианов сжатия ($\theta = \pi/3$) показывает, что в режиме низких гидростатических напряжений ($\sigma_{okT}/R_b < 1$) указанные критерии хорошо согласуются как между собой, так и с экспериментальными данными. В режиме средних гидростатических напряжений ($1 \leq \sigma_{okT}/R_b \leq 2$) предлагаемый авторами критерий и критерий Виллама-Варнке дают близкие результаты, при этом модифицированный критерий Друкера-Прагера показывает, в среднем, на 20 % завышенное значение прочности. При этом в режиме высоких гидростатических напряжений ($2 \leq \sigma_{okT}/R_b \leq 3,5$) критерий Виллама-Варнке по сравнению с предлагаемым критерием и экспериментальными данными дает, напротив, заниженное значение прочности бетона.

Однако, стоит отметить, что при $\sigma_{okT}/R_b > 2,5$ наблюдается значительный разброс в экспериментальных данных, а при $\sigma_{okT}/R_b \gg 3$ прочность бетона и вовсе экспериментально изучена недостаточно [20].

Достоверных экспериментальных данных по меридиану растяжения ($\theta = 0$) имеется ограниченное количество. Как можно видеть из рисунка 7 в диапазоне $3 \geq \sigma_{okT}/R_b \geq 1$ прочность бетона согласно предлагаемому критерию и критерию Виллама-Варнке отвечает опытным данным.

На меридиане растяжения ($\theta = 0$) критерий Друкера-Прагера показывает ошибочное завышенное значение прочности бетона. Это обстоятельно объясняется тем, что критерий Друкера-Прагера в пространстве главных напряжений представляет собой симметричную

относительно гидростатической оси коническую поверхность вращения с прямыми меридианами, что эквивалентно $R_{bt} = R_b$.

6.2 Верификация предлагаемого критерия в режиме двухосного сжатия бетона

6.2 Verification of the proposed criteria in biaxial concrete compression mode

Для проверки предлагаемого критерия использовались экспериментальные данные двухосных испытаний различных видов бетонов в режиме равномерного и неравномерного сжатия¹, проведенные в НИИЖБ, как наиболее содержательные и достоверные. Так как разброс значений прочности бетонов для одних и тех же режимов нагружения σ_3/σ_2 оказался довольно существенный, проверка указанного критерия осуществлялась по осредненным экспериментальным кривым в указанных на рисунке 8 точках.

Предельные кривые, отвечающие приведенному критерию, для различных видов бетонов показаны на рисунке 8.

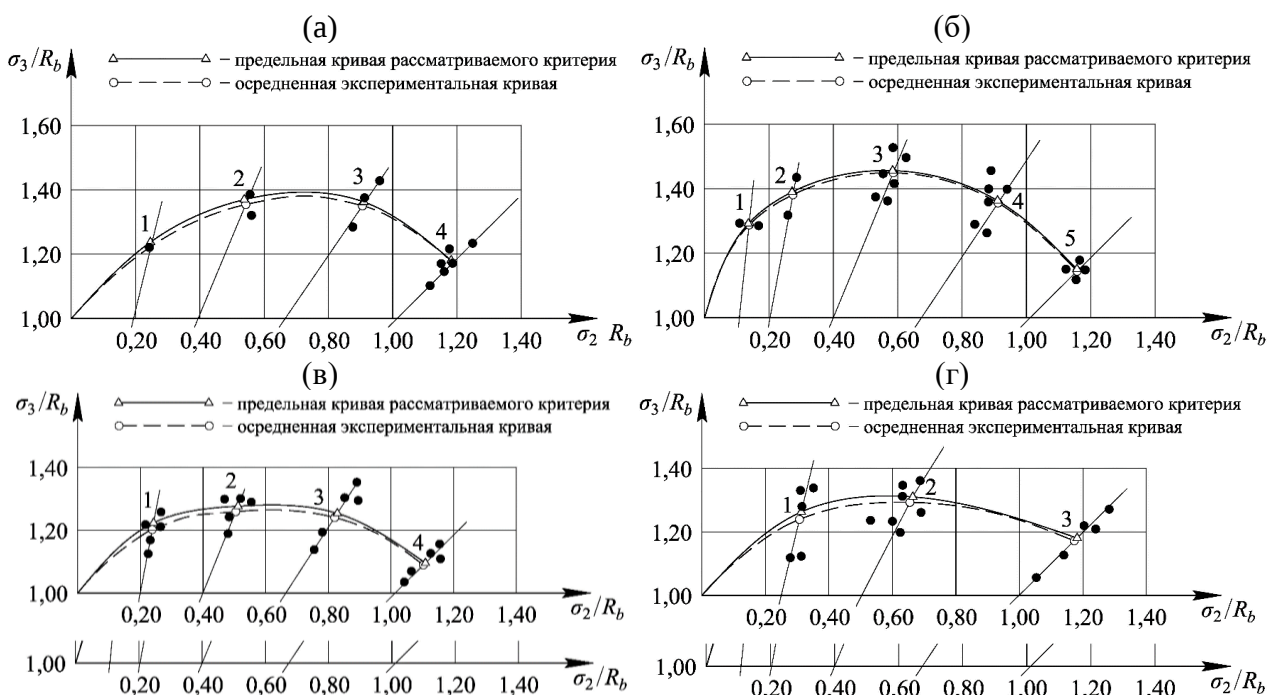


Рисунок 8. К проверке предельного сопротивления бетонов двухосному сжатию (разработано авторами): а — для тяжелого крупнозернистого бетона, $R_b = 58,7$ МПа; б — то же, $R_b = 36,7$ МПа; в — для тяжелого мелкозернистого бетона, $R_b = 43,3$ МПа; г — для керамзитобетона, $R_b = 35,5$ МПа

Figure 8. Verification of the ultimate resistance of concrete to biaxial compression (developed by the authors): а — for heavy coarse concrete, $R_b = 58,7$ МПа; б — the same, $R_b = 36,7$ МПа; в — for heavy fine concrete, $R_b = 43,3$ МПа; г — for expanded clay concrete, $R_b = 35,5$ МПа

Количественная оценка значений прочности бетонов в указанных на рисунке 8 точках, полученная на основании приведенного критерия и по осредненным экспериментальным данным, приведена в таблицах 3, 4.

Как можно видеть из таблиц 3, 4, соответствующие октаэдрическому нормальному напряжению $\sigma_{окТ}$ девиаторная координата приведенного критерия $r(\bar{\xi}, \theta)$ и девиатор $\sqrt{3}\tau_{окТ}$, отвечающий экспериментальным данным, находятся в хорошей согласованности друг с другом.

Таблица 3 / Table 3

К проверке предлагаемого критерия в режиме двухосного сжатия бетона

Proposed criteria verification in the biaxial concrete compression mode

№ п.п. Ordinal number	Вид бетона Concrete type	№ точки Point number	Главные напряжения Principal stresses		Угол вида напряженного состояния θ Stress mode angle θ
			σ_2/R_b	σ_3/R_b	
1	Тяжелый крупнозернистый бетон, $R_b = 58,7$ МПа (рис. 8 а) Heavy coarse concrete, $R_b = 58,7$ MPa (FIG. 8 а)	1	0,24	1,22	49,300°
		2	0,54	1,35	36,586°
		3	0,90	1,35	19,107°
		4	1,18	1,18	0
2	Тяжелый крупнозернистый бетон, $R_b = 36,7$ МПа (рис. 8 б) Heavy coarse concrete, $R_b = 36,7$ MPa (fig. 8 б).	1	0,14	1,28	54,278°
		2	0,28	1,38	48,935°
		3	0,58	1,45	36,586°
		4	0,92	1,36	18,483°
		5	1,16	1,16	0
3	Тяжелый мелкозернистый бетон, $R_b = 43,3$ МПа (рис. 8 в) Heavy fine concrete, $R_b = 43,3$ MPa (fig. 8 в)	1	0,24	1,20	49,107°
		2	0,50	1,26	36,794°
		3	0,82	1,24	19,450°
		4	1,10	1,10	0
4	Керамзитобетон, $R_b = 35,5$ МПа (рис. 8 г) Expanded clay concrete, $R_b = 35,5$ MPa (fig. 8 г)	1	0,30	1,24	46,593°
		2	0,65	1,29	29,744°
		3	1,17	1,17	0

Разработано авторами / Developed by the authors

Так, для тяжелых крупнозернистых бетонов расхождения в значениях прочности $\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}\tau_{окТ}}{r(\bar{\xi}, \theta)} - 1 \right) \times 100\%$ составили не более 3,5 %, для тяжелого мелкозернистого бетона и керамзитобетона — не более 4 %.

На основании полученных и подтвержденных экспериментальным путем результатов, можно заключить, что разработанный критерий является универсальным и позволяет получать достоверные показатели прочности различных видов бетонов как при трехосном нагружения в режимах низкой и высокой боковой компрессии, так и в случае двухосного равномерного и неравномерного сжатия.

Таблица 4 / Table 4

К проверке предлагаемого критерия в режиме двухосного сжатия бетона

Proposed criteria verification in the biaxial concrete compression mode

№ п.п Ordinal number	Вид бетона Concrete type	№ точки Point number	Октаэдрические напряжения, МПа Hydrostatic tension, MPa		Девiator $r(\bar{\xi}, \theta)$, МПа Deviator $r(\bar{\xi}, \theta)$, MPa	Расхождение, % Deviation, %
			$\sigma_{окT}$	$\sqrt{3}\tau_{окT}$		
1	Тяжелый крупнозернистый бетон, $R_b = 58,7$ МПа (рис. 8 а) Heavy coarse concrete, $R_b = 58,7$ MPa (fig. 8 z)	1	28,567	53,654	55,600	-3,500
		2	36,981	56,407	57,713	-2,264
		3	44,025	57,063	57,501	-0,763
		4	46,177	56,555	56,742	-0,329
2	Тяжелый крупнозернистый бетон, $R_b = 36,7$ МПа (рис. 8 б) Heavy coarse concrete, $R_b = 36,7$ MPa (fig. 8 z)	1	17,371	36,440	36,768	-0,892
		2	20,307	37,861	38,309	-1,171
		3	24,834	37,879	38,224	-0,905
		4	27,892	36,019	36,214	-0,541
		5	28,381	34,760	34,991	-0,661
3	Тяжелый мелкозернистый бетон, $R_b = 43,3$ МПа (рис. 8 в) Heavy fine concrete, $R_b = 43,3$ MPa (fig. 8 z)	1	20,784	38,883	40,445	-3,861
		2	25,403	38,851	40,291	-3,575
		3	29,733	38,619	39,580	-2,428
		4	31,753	38,890	39,556	-1,684
4	Керамзитобетон, $R_b = 35,5$ МПа (рис. 8 з) Expanded clay concrete, $R_b = 35,5$ MPa (fig. 8 z)	1	18,223	32,479	33,692	-3,599
		2	22,957	32,382	33,290	-2,728
		3	27,690	33,913	34,082	-0,494

Разработано авторами / Developed by the authors

Соответствующее математическое представление указанного критерия прочности обусловлено, в первую очередь, удобством программной реализации методом конечных элементов.

Так, предлагаемый критерий прочности и соответствующая ему поверхность в пространстве главных напряжений может рассматриваться в качестве поверхности разрушения в случае модели хрупкого раздробления бетона сжатой зоны, а также интерпретироваться как предельная поверхность текучести в случае модели бетона, как упругопластического материала.

Приведенный выше критерий прочности бетона реализован в вычислительном комплексе ПРИНС [13], позволяет выполнять расчеты бетонных и железобетонных конструкций с учетом объемного напряженного состояния методом конечных элементов в физически нелинейной постановке.

6.3. Тестирование конечного элемента

6.3 Finite element testing

В ВК ПРИНС расчет физически нелинейных конструкций методом конечных элементов ведется в приращениях по формуле [1]:

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (22)$$

где $\Delta\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{K}_0$.

Матрицы жесткости $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{K}_1$ вычисляются в начале и конце каждой итерации.

Уравнение (22) решается шагово-итерационным способом согласно уравнению:

$$\mathbf{K}_0\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P} - \Delta\mathbf{K}_{i-1}\Delta\mathbf{u}_{i-1}, \quad (23)$$

где i — номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса по уравнению (23) вычисляются полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}, \quad (24)$$

где $\Delta\mathbf{u}$ и $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ — приращения перемещений и напряжений, соответственно.

Приращения напряжений, обусловленные приращением деформаций $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, определяются по формуле:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (25)$$

где $\mathbf{C}_{ep}$ — упругопластическая матрица бетона.

В общем случае, на каждом шаге нагружения анализируется напряженное состояние материала и при возникновении пластических деформаций и (или) трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции. Итерации равновесия производятся по формуле (22), которая модифицируется к виду:

$$\mathbf{K}_j\Delta\mathbf{u}_j^i = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{i-1}, \quad (26)$$

В формуле (26) матрица жесткости принимается равной матрице $\mathbf{K}_j$, найденной в конце шага при итерациях по формуле (23).

Таким образом, в формуле (23) итерируется матрица жесткости, а в формуле (26) — вектор узловых сил, эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости K отдельного конечного элемента находится по формуле:

$$K = \int_V B^T C_e B dV, \quad (27)$$

где B — матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица); C_e — матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций (физическая матрица).

Для тестирования разработанного конечного элемента были использованы результаты собственных экспериментов авторов, выполненных в лаборатории строительных конструкций и материалов департамента строительства инженерной академии РУДН, в ходе которых исследовалось напряженно-деформированное состояние железобетонной балки (рис. 9).

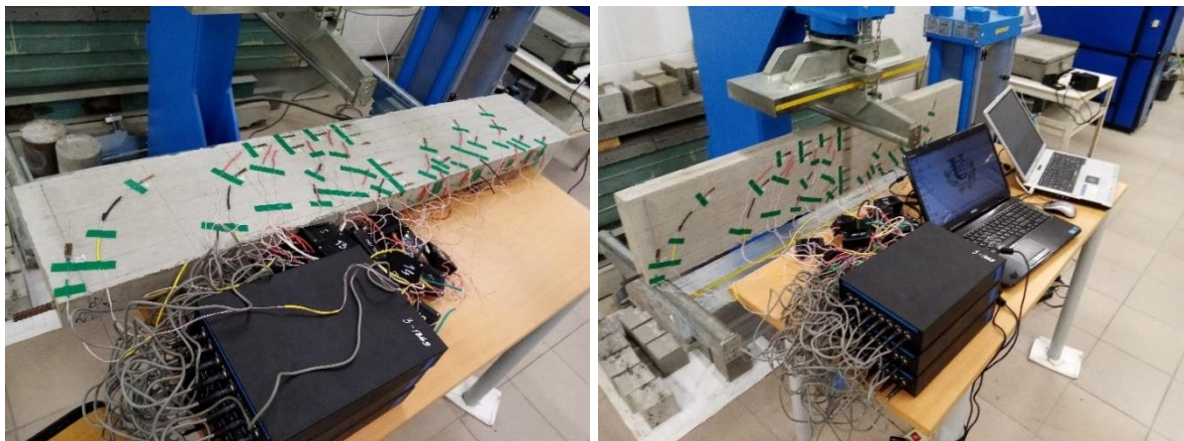


Рисунок 9. Общий вид экспериментальной балки и использованного оборудования (разработано авторами)

Figure 9. General view of the experimental beam and the equipment used (developed by the authors)

Для оценки напряженного состояния, в соответствии с методикой эксперимента, по направлению главных деформаций в 21 точке на поверхности балки были наклеены тензорезисторы BF120-20AA с базой 20 мм, подключаемые по полной мостовой схеме к 24-х канальной тензостанции ZETLAB. Эксперимент проводился на испытательной установке Matest с постоянной скоростью нагружения 10 Н/с. При этом нагрузка, деформации и перемещения характерных точек балки записывались синхронно.

Материал балки — бетон класса В60. Балка имела продольное армирование арматурой класса А400 Ø10 (рис. 10).

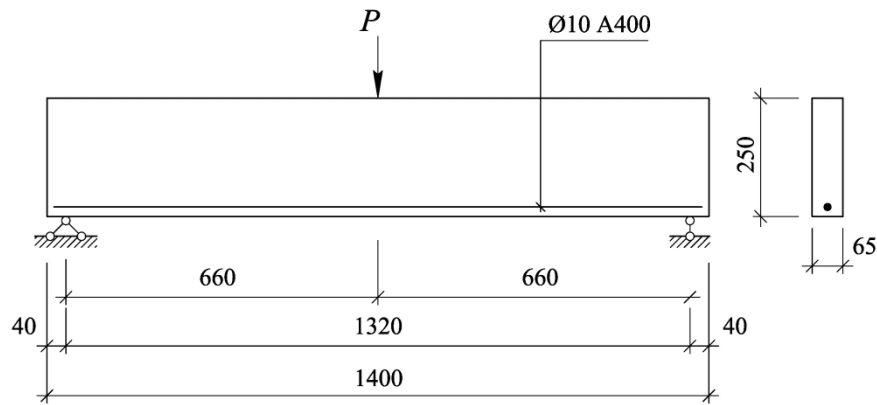


Рисунок 10. Геометрические размеры
и схема армирования балки (разработано авторами)

Figure 10. Geometrical dimensions and beam
reinforcement scheme (developed by the authors)

Конечно-элементная модель экспериментальной балки состояла из 2 800 объемных восьмиузловых элементов (рис. 11). Армирование балки моделировалось одномерными стержневыми элементами с тремя степенями свободы в узле. Для продольной арматуры принималась гипотеза идеального упругопластического поведения, и учитывалось влияние квадратов углов поворота на продольные усилия. Стержни поперечного армирования находились в условиях линейно-упругого деформирования.

Нагружение и условия опирания балки соответствовали методике проведенных авторами экспериментов.

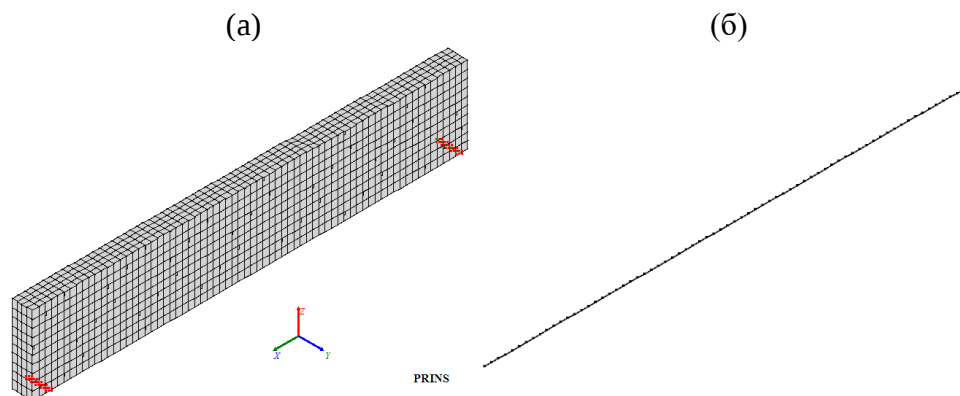


Рисунок 11. Расчетная схема экспериментальной балки (разработано авторами): а — КЭ модель «тела» балки; б — схема армирования стержневыми КЭ

Figure 11. Experimental beam design diagram (developed by the authors): а — finite element model of the beam «body»; б — scheme of reinforcement by rod finite elements

Суммарная нагрузка на балку была принята равной $P=36$ кН. Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом. Был задан 41 шаг нагружения, коэффициент к нагрузке на первом шаге принимался равным 0,01, а на остальных шагах — 0,03.

По результатам расчетов исследовались процесс трещинообразования в бетоне, прогибы балки при фиксированных значениях нагрузки, а также предельная (разрушающая) нагрузка.

Результаты расчетов представлены в таблице 5.

Таблица 5 / Table 5

Результаты расчета балки

Beam calculation results

Исследуемая величина <i>Investigated value</i>	Прогибы балки (мм) при нагрузке, кН <i>Beam deflections (mm) under load, kN</i>			Нагрузка трещинообразования, кН <i>Cracking load, kN</i>	Разрушающая нагрузка, кН <i>Rupture load, kN</i>
	18	21	24		
Результаты экспериментов авторов <i>Authors experimental results</i>	0,96	1,170	1,488	9,375	28,849
Результаты расчета в ВК ПРИНС <i>Calculation results in PrinCe computing system</i>	0,742	1,131	1,476	9,00	27,36
Погрешность, % <i>Deviation</i>	29,4	3,33	0,81	4,17	5,44

Разработано авторами / Developed by the authors

Как видно из таблицы 5, расхождение в значениях предельной (разрушающей) нагрузки, полученной по результатам расчетов в ВК ПРИНС, в сравнении с экспериментальными данными не превышает 5,44 %, что свидетельствует о высокой точности разработанного конечного элемента, а также о надежности и устойчивости используемых алгоритмов нелинейного расчета.

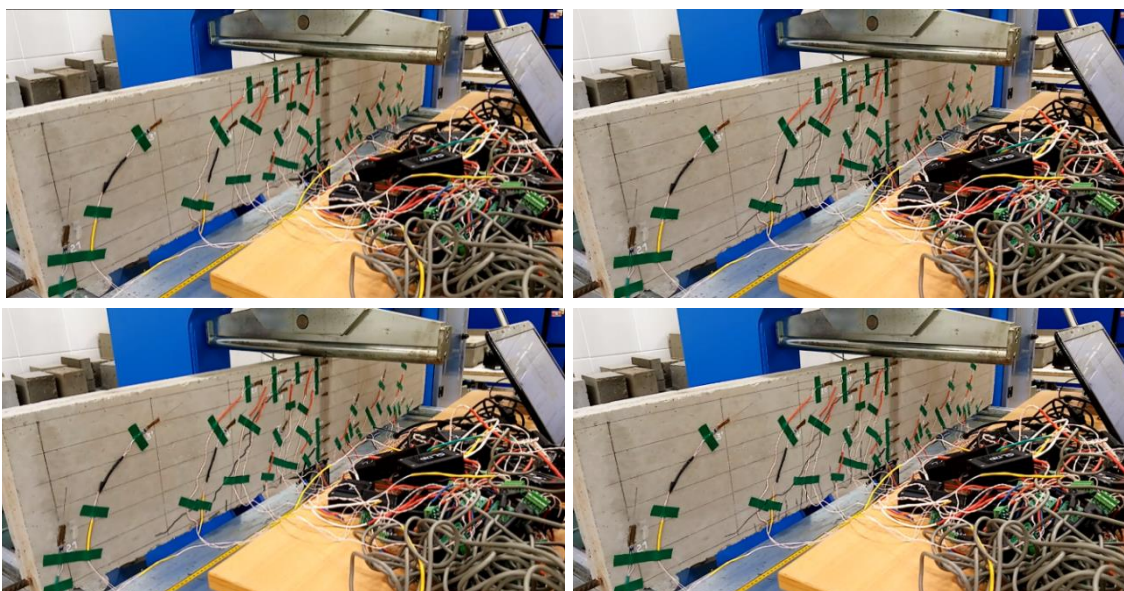


Рисунок 12. Характер разрушения экспериментальной балки (разработано авторами)

Figure 12. Experimental beam fracture mode (developed by the authors)

Процесс трещинообразования рассматриваемой балки, полученный с использованием ВК ПРИНС, показан на рисунке 13.

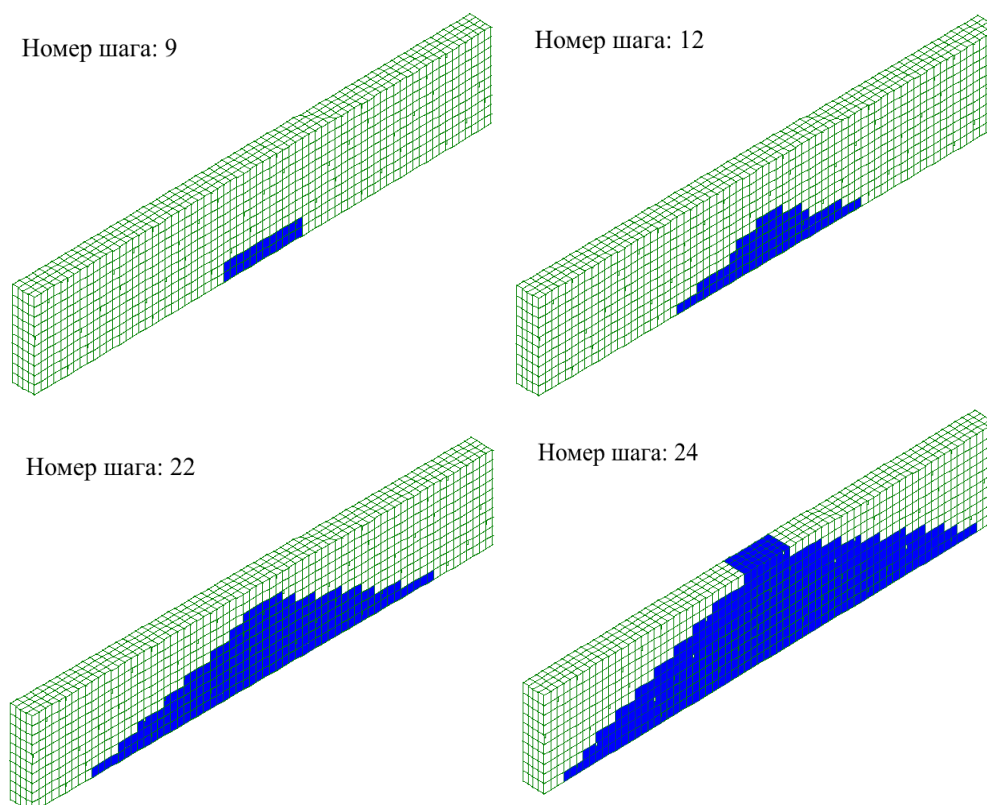


Рисунок 13. Трещинообразование рассматриваемой балки (разработано авторами)

Figure 13. Crack formation of the beam under consideration (developed by the authors)

Таким образом, авторами разработан и реализован физически нелинейный объемный конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций, позволяющий учитывать хрупкое разрушение бетона в области сжатия и процесс трещинообразования в бетоне.

Так как армирование конструкции может выполняться произвольным образом, его особенности, в полной мере, могут быть учтены включением в конечно-элементную схему конструкции одномерных стержневых элементов, характеризующих арматуру. При этом для арматурной стали возможно задание как упругой, так и упругопластической моделей деформирования.

В процессе отладки программы для верификации разработанного конечного элемента была проведена серия тестовых расчетов балки, находящейся в условии трехточечного изгиба. Последующее сравнение результатов расчета с данными экспериментов, проведенных авторами, подтвердило высокую точность разработанного конечного элемента.

Данный конечный элемент адаптирован к ВК ПРИНС и в составе этого программного комплекса может быть использован инженерами проектных и научных организаций для практических расчетов массивных железобетонных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агапов, В.П.** Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций / В.П. Агапов. — М.: Изд-во АСВ, 2005. — 245 с.
2. **Zienkiewicz, O.C.** The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. — DOI <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>. — Оксфорд: McGraw-Hill, 2005. — 631 с. — URL: <https://www.sciencedirect.com/book/9781856176347/the-finite-element-method-for-solid-and-structural-mechanics> (дата обращения: 29.09.2023).
3. **Altaee, M.** Employment of damage plasticity constitutive model for concrete members subjected to high strain-rate / M. Altaee, M. Kadhim, S. Altayee, A. Adheem. — DOI <http://dx.doi.org/10.4108/eai.28-6-2020.2298164> // Proceedings of the 1st International Multi-Disciplinary Conference Theme: Sustainable Development and Smart Planning, IMDC-SDSP 2020, Cyberspace, 28–30 June 2020 / EAI, 2020. — С. 2298164. — URL: <https://eudl.eu/doi/10.4108/eai.28-6-2020.2298164> (дата обращения: 29.09.2023).
4. **Гениев, Г.А.** Вариант условия прочности бетона / Г.А. Гениев, Н.М. Аликова // Теоретические исследования в области строительной механики пространственных систем / Центр. науч.-исслед. ин-т строит. конструкций имени В.А. Кучеренко; Под ред. д-ра техн. наук М.И. Ерхова М.: ЦНИИСК, 1976. — С. 21–27.
5. **Корсун, В.И.** Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов / В.И. Корсун, А.В. Недорезов, С.Ю. Макаренко // Современное промышленное и гражданское строительство. — 2014. — Т 10. — № 1. — С. 65–78. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22936485>. — EDN THXXCZ. (дата обращения: 29.09.2023).
6. **Zhenpeng, Y.** Experimental Study on Mechanical Properties and Failure Criteria of Self-Compacting Concrete under Biaxial Tension-Compression / Y. Zhenpeng, H. Qiao, L. Furong, Q. Yue, Z. Jun. — DOI [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0002675](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0002675) // Journal of Materials in Civil Engineering. — 2019. — Т 31. — № 5. — С. 4019045. — URL: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29MT.1943-5533.0002675>. (дата обращения: 29.09.2023).
7. **Naganuma, K.** Stress-strain relationship for concrete under triaxial compression / K. Naganuma. — DOI https://doi.org/10.3130/aijs.60.163_2 // Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ). — 1995. — Т 60. — № 474. — С. 163–170. — URL: https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijs/60/474/60_KJ00004100188/article/-char/en. (дата обращения: 29.09.2023).
8. **Wang, H. L.** Behavior of mass concrete under biaxial compression-tension and triaxial compression-compression-tension / H.L. Wang, Y.P. Song. — DOI <https://doi.org/10.1617/s11527-008-9381-y> // Materials and Structures. — 2009. — Т 42. — С. 241–249. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1617/s11527-008-9381-y>. (дата обращения: 29.09.2023).
9. **Гвоздев, А.А.** Прочность бетона при двухосном напряженном состоянии / А.А. Гвоздев, П.М. Бич // Бетон и железобетон. — 1974. — № 7. — С. 10–11.
10. **Перваков, В.Н.** Прочность тяжелого бетона при трехосном напряженном состоянии «растяжение-сжатие» / В.Н. Перваков // Новое в технологии, расчете и конструировании железобетонных конструкций: сборник научных трудов / Под ред.: Б.А. Крылова / Под ред.: Б.А. Крылова М.: НИИЖБ, 1984. — С. 90–96.
11. **Карпенко, Н.И.** К определению прочности бетона при трехосном сжатии / Н. И. Карпенко, С.И. Карпенко // Технологии бетонов. — 2014. — № 10. — С. 40–41. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22631438>. — EDN TBGIPF. (дата обращения: 12.10.2023).

12. **Gabet, T.** Ultimate strength of plain concrete under extreme combined stresses / T. Gabet, Y. Malecot, L. Daudeville. — DOI <https://doi.org/10.1080/17747120.2006.9692834> // Revue Européenne de Génie Civil. — 2006. — Т 10. — № 3. — С. 375–389. — URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17747120.2006.9692834>. (дата обращения: 12.10.2023).
13. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС: монография / В.П. Агапов, А.С. Маркович. — М.: РУДН, 2023. — 264 с.
14. **Willam, K.J.** Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete / K.J. Willam, E.P. Warnke // Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III / IABSE, 1975. — С. 1–30. — URL: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf>. (дата обращения: 12.10.2023).
15. **Теличко, В.Г.** Исследование прочности при двухосном сжатии бетона класса b-25 / В.Г. Теличко, Л.А. Зиборов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2009. — № 1-2. — С. 89–94. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12175834>. — EDN KGLNXB. (дата обращения: 12.10.2023).
16. **Balmer, G.G.** Shearing Strength of Concrete under High Triaxial Stress-Computation of Mohr's Envelope as a Curve, Structural Research Laboratory Report No. SP-23 / G.G. Balmer. — U.S. Department of the Interior, 1949.
17. **Kupfer, H.** Behavior of Concrete under Biaxial Stresses / H. Kupfer, H. Hilsdorf, H. Rusch // Am Concrete Inst Journal & Proceedings. — 1969. — Т 66. — № 8. — С. 656–666. — URL: <https://trid.trb.org/view/101925>. (дата обращения: 12.10.2023).
18. **Mills, L.L.** Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions / L.L. Mills, R.M. Zimmerman // ACI Journal. — 1970. — Т 67. — № 10. — С. 802–807.
19. **Drucker, D.C.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design / D.C. Drucker, W. Prager. — DOI <https://doi.org/10.1090/qam/48291> // Quart. Appl. Math. — 1952. — Т 10. — № 1952. — С. 157–165. — URL: <https://www.ams.org/journals/qam/1952-10-02/S0033-569X-1952-48291-2> (дата обращения: 12.10.2023).
20. **Zhou, Y.** Axial compressive behavior of FRP-confined lightweight aggregate concrete: An experimental study and stress-strain relation model / Y. Zhou, X. Liu, F. Xing, H. Cui, L. Sui. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.180> // Construction and Building Materials. — 2016. — Т 119. — С. 1–15. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0950061816302392>. (дата обращения: 12.10.2023).

Сведения об авторах:

Агапов Владимир Павлович — доктор технических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», Москва, Россия, e-mail: agapovpb@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>
РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=534434

Маркович Алексей Семенович — кандидат технических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», Москва, Россия, e-mail: markovich-as@rudn.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>
РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=706972

Статья получена: 03.12.2023. Принята к публикации: 28.02.2024. Опубликовано онлайн: 13.03.2024.

REFERENCES

1. Agapov V.P. Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstruktsiy [Finite element method in statics, dynamics and stability of structures]. Moscow: ASV; 2005. (In Russ.).
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. Oxford: McGraw-Hill; 2005. Available at: <https://www.sciencedirect.com/book/9781856176347/the-finite-element-method-for-solid-and-structural-mechanics> (accessed 29th September 2023). (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>.

3. Altaee M., Kadhim M., Altayee S., Adheem A. Employment of damage plasticity constitutive model for concrete members subjected to high strain-rate. In: *Proceedings of the 1st International Multi-Disciplinary Conference Theme: Sustainable Development and Smart Planning, IMDC-SDSP 2020, Cyberspace, 28–30 June 2020*. EAI; 2020. p. 2298164. Available at: <https://eudl.eu/doi/10.4108/eai.28-6-2020.2298164> (accessed 29th September 2023). (In Eng.) DOI: <http://dx.doi.org/10.4108/eai.28-6-2020.2298164>.
4. Geniyev G.A., Alikova N.M. Variant usloviya prochnosti betona [Concrete strength condition option]. In: *Teoreticheskiye issledovaniya v oblasti stroitel'noy mekhaniki prostranstvennykh sistem [Theoretical research in the field of structural mechanics of spatial systems]*. Moscow: TsNIISK; 1976. p. 21–27. (In Russ.).
5. Korsun V., Niedoriezov A., Makarenko S. Comparative Analysis of The Strength Criteria for Concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014; 10(1): 65–78. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22936485> (accessed 29th September 2023). (In Russ., abstract in Eng.).
6. Zhenpeng Y., Qiao H., Furong L., Yue Q., Jun Z. Experimental Study on Mechanical Properties and Failure Criteria of Self-Compacting Concrete under Biaxial Tension-Compression. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2019; 31(5): 4019045. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0002675](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0002675).
7. Naganuma K. Stress-strain relationship for concrete under triaxial compression. *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*. 1995; 60(474): 163–170. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.3130/aijs.60.163_2.
8. Wang H.L., Song Y.P. Behavior of mass concrete under biaxial compression-tension and triaxial compression-compression-tension. *Materials and Structures*. 2009; 42: 241–249. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1617/s11527-008-9381-y>.
9. Gvozdev A.A., Bich P.M. Prochnost' betona pri dvukhosnom napryazhennom sostoyanii [Strength of concrete under biaxial stress state]. *Beton i zhelezobeton [Concrete and reinforced concrete]*. 1974; (7): 10–11. (In Russ.).
10. Pervakov V.N. Prochnost' tyazhelogo betona pri trekhosnom napryazhennom sostoyanii «rastyazheniye-szhatiye-szhatiye» [Strength of heavy concrete under triaxial stress state “tension-compression-compression”]. In: *Novoye v tekhnologii, raschete i konstruirovanii zhelezobetonnykh konstruksiy: sbornik nauchnykh trudov [New in technology, calculation and design of reinforced concrete structures: collection of scientific papers]*. Moscow: NIIZhB; 1984. p. 90–96. (In Russ.).
11. Karpenko N.I., Karpenko S.I. To Determine the Strength of Concrete Under Triaxial Compress. *Concrete Technologies*. 2014; (10): 40–41. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22631438> (accessed 12th October 2023). (In Russ., abstract in Eng.).
12. Gabet T., Malecot Y., Daudeville L. Ultimate strength of plain concrete under extreme combined stresses. *Revue Européenne de Génie Civil*. 2006; 10(3): 375–389. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1080/17747120.2006.9692834>.
13. Agapov V.P., Markovich A.S. Nelineynyye modeli betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiy. Teoriya i realizatsiya v VK PRINS: monografiya [Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in VK PRINCE: monograph]. Moscow: RUDN University; 2023. (In Russ.).
14. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. In: *Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III*. IABSE; 1975. p. 1–30. Available at: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf> (accessed 12th October 2023). (In Eng.).
15. Telichko V., Ziborov L. For the mathematical model of transverse bending of thin plates of at full strength study of compaction concrete class B-25. *Izvestiya Tula State University*. 2009; (1-2): 89–94. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12175834> (accessed 12th October 2023). (In Russ., abstract in Eng.).

16. Balmer G.G. Shearing Strength of Concrete under High Triaxial Stress-Computation of Mohr's Envelope as a Curve, Structural Research Laboratory Report No. SP-23. U.S. Department of the Interior; 1949. (In Eng.).
17. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *Am Concrete Inst Journal & Proceedings*. 1969; 66(8): 656–666. Available at: <https://trid.trb.org/view/101925> (accessed 12th October 2023). (In Eng.).
18. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions. *ACI Journal*. 1970; 67(10): 802–807. (In Eng.).
19. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quart. Appl. Math.* 1952; 10(1952): 157–165. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/48291>.
20. Zhou Y., Liu X., Xing F., Cui H., Sui L. Axial compressive behavior of FRP-confined lightweight aggregate concrete: An experimental study and stress-strain relation model. *Construction and Building Materials*. 2016; 119: 1–15. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.180>.

Information about the authors:

Vladimir P. Agapov — Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia, e-mail: agapovpb@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>

RSCI: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=534434

Alexey S. Markovich — Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia, e-mail: markovich-as@rudn.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>

RSCI: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=706972

Submitted: 3rd December 2023. Revised: 28th February 2024. Published online: 13th March 2024.