Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian journal of transport engineering http://t-s.today/

2016, Том 3, №3 / 2016, Vol 3, No 3 http://t-s.today/issues/vol3-no3.html

URL статьи: http://t-s.today/PDF/06TS316.pdf

DOI: 10.15862/06TS316 (http://dx.doi.org/10.15862/06TS316)

Ссылка для цитирования этой статьи:
Столяров В.В., Щеголева Н.В. Примеры расчёта вероятностей при обработке дискретных данных по нормальному и биноминальному распределениям // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», Том 3, №3 (2016) http://t-s.today/PDF/06TS316.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Stolyarov V.V., Shchegoleva N.V. [Examples of probability calculation in processing digital data using the normal and binomial distributions] Russian journal of transport engineering, 2016, Vol. 3, no. 3. Available at: http://t-s.today/PDF/06TS316.pdf (In Russ.)

УДК 519.2, 625.7/.8

Столяров Виктор Васильевич
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов[1]
Доктор технических наук, профессор
E-mail: stolyarov_v_v@mail.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=443650

Щеголева Наталья Вячеславовна
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Доцент кафедры «Транспортное строительство»
Кандидат технических наук
E-mail: Shegoleva123@mail.ru
РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=668391

Примеры расчёта вероятностей при обработке дискретных данных по нормальному и биноминальному распределениям

Аннотация. При решении задач, связанных со статистической обработкой дискретных целочисленных величин, изменяющихся последовательно на единицу удобнее всего использовать преобразования А. Муавра, которые были выполнены для перехода от дискретного биноминального распределения к непрерывному распределению, названного впоследствии нормальным. Закон нормального распределения вероятностей Муавра (Муавра – Лапласа, Гаусса) широко применяется при статистической обработке непрерывных величин и незаслуженно редко используется в первоначальном виде, пригодном для обработки дискретных целочисленных величин, изменяющихся через единицу. В серии статей авторы показывают достоинства этого метода при решении прикладных задач, связанных с обработкой целочисленных переменных.

В данной статье в сжатом виде показаны основные расчётные формулы, позволяющие использовать возможности непрерывного распределения при статистической обработке целочисленных переменных. Приведены примеры подобных расчётов из разных областей знаний: управленческой, технической (по тематике транспортного строительства) и общественной деятельности. Во всех примерах расчёта вероятностей при обработке

[1] 410054, г. Саратов, ул. Политехническая 77

дискретных данных выполнены сравнения результатов, полученных по нормальному и биноминальному распределениям. Замена биноминального распределения нормальным законом приводит к значительному уменьшению объёма вычислений без снижения точности полученных результатов при контроле применимости нормального распределения по формуле граничного условия.

Ключевые слова: плотность вероятностей; функция Лапласа; функция нормального распределения; биноминальное распределение дискретных целочисленных величин; математическое ожидание и среднее значение; среднеквадратическое отклонение; независимые величины или факторы; критические параметры; граница применимости нормального закона вместо биноминального распределения

Закон нормального распределения вероятностей Муавра (Муавра – Лапласа, Гаусса) широко применяется при статистической обработке непрерывных величин и незаслуженно редко используется в первоначальном виде, полученном А. Муавром и пригодном для обработки дискретных целочисленных величин, изменяющихся через единицу:

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (1)$$

где: $\varphi(t)$ - ордината стандартной плотности нормального распределения вероятностей при числе ожидаемых событий k в n испытаниях;

t – переменная нормального распределения, определяемая по формуле:

$$t = \xi \cdot h\,, \qquad (2)$$

в которую входят:

ξ – отклонение относительной частоты испытуемого события $(\frac{k}{n})$ от его вероятности (p):

$$\xi = \mathrm{p} - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}, \qquad (3)$$

k – число ожидаемых событий в n испытаниях (опытах) при условии, что в каждом опыте вероятность появления события остается постоянной и равной p (p = const);

h – вспомогательная переменная:

$$h = \sqrt{\frac{n}{(p \cdot q)}}. \qquad (4)$$

n – число опытов (испытаний);

p – постоянная вероятность появления ожидаемого числа событий k в одном испытании (опыте);

q – вероятность появления противоположного события (q = 1 – p) в одном испытании или опыте.

Для использования данного метода определяют:

- математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормального закона распределения, установленного по параметрам биноминального распределения

$$M = n \cdot p; \qquad (5)$$

$$\sigma = n \cdot p \cdot q. \tag{6}$$

- нижние пределы переменных нормального (t) и биноминального (x) распределений, определяемые по зависимостям

$$t_1^{k\min} = h \cdot p\,; \tag{7}$$

$$x_1^{\min} = M - t_1^{k^{min}} = M - h \cdot \xi; \tag{8}$$

- верхние пределы переменных соответствующих распределений

$$t_2^{k^{max}} = h \cdot [p - \frac{k^{max}}{n}], \tag{9}$$

$$x_2^{max} = M + t_2^{k^{max}}. \tag{10}$$

где: t_1^{kmin} и t_2^{kmax} – пределы интегрирования, используемые в формуле (1);

x_1^{min} и x_2^{max} – пределы переменных, используемые в формуле, основанной на функции Лапласа:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left[\frac{x_2 - M}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{x_1 - M}{\sigma}\right]. \tag{11}$$

При подстановке в формулу (11) в качестве параметра x_2 верхнего предела переменной x_2^{max} , установленного по формуле (10), а в качестве нижнего предела переменной x_1 – параметра x_1^{min} , установленного по формуле (8), получаем суммарную вероятность появления всех ожидаемых событий на участке нормального распределения в границах от x_1^{min} до x_2^{max}.

По биноминальному закону эту же вероятность определяют как суммарную вероятность (при переборе событий k через единицу от k_1^{min} до k_m^{max}) по формуле

$$P_n(k) = p_n(0) + p_n(1) + \dots + p_n(k_m^{max}) = \sum_{k=0}^{k=k_m} p_n(k), \tag{12}$$

где порядковый номер m значения k_m^{max} определяют по формулам:

$$\text{при } p < 0{,}5\ m = p(n + 1) + t_2 - 1; \tag{13}$$

$$\text{при } p = 0{,}5\ m = M + t_2; \tag{14}$$

$$\text{при } p > 0{,}5\ m = p(n + 1) + t_2. \tag{15}$$

Суммируемые вероятности в формуле (12) устанавливают по формуле биноминального распределения при всех значениях k_i от k_1^{min} до k_m^{max}

$$p_n(k) = C_n^k \cdot q^{n-k} \cdot p^k, \tag{16}$$

где: $p_n(k)$ – вероятность появления события k раз в n испытаниях;

C_n^k – биноминальный коэффициент, учитывающий число сочетаний из n по k:

$$C_n^k = \frac{n!}{[k! \cdot (n-k)!]}\,. \tag{17}$$

Тогда вероятность появления события k раз при n испытаниях $[P_n(k)]$ на интервале dt определится по формуле:

$$p_n(k) = \varphi(t) \cdot dt, \tag{18}$$

где: φ(t) – см. формулу (8);

dt – изменение переменной t при изменении k на единицу:

$$dt = h \cdot d\xi = \frac{h}{n}. \tag{19}$$

На основе данного математического аппарата покажем примеры расчета вероятностей при обработке дискретных данных по нормальному и биноминальному распределениям, подтверждающие возможность замены дискретного закона сглаживающим нормальным распределением (с параметрами p, q, n, k и t биноминального распределения). Теоретическое описание и результаты применения нормального и других законов распределения к оценкам вероятностей, включая оценки риска представлены в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

Пример 1

Пусть в голосовании, требующем дать ответ “за” или “против” на какой-либо поставленный вопрос, принимает участие три члена совета директоров (n = 3).

Определить вероятность появления события k раз при n испытаниях на интервале распределения d_t при следующих исходных данных k = 2, n = 3, p = 0,333 и q = 0,667 с использованием нормального и биноминального законов распределения.

Нормальный закон дает следующие результаты.

1. По формуле (3) $\xi = p - (\frac{k}{n}) = 0{,}333 - (\frac{2}{3}) = -\ 0{,}334.$
2. По зависимости (4)

$$h = \sqrt{\frac{n}{(p \cdot q)}} = \sqrt{\frac{3}{(0{,}333 \cdot 0{,}667)}} = 3{,}675.$$

3. По выражению (2) $t = h \cdot \xi = 3{,}675 \cdot (-\ 0{,}334) = -\ 1{,}227.$
4. Ордината φ(t) при $t = \pm 1{,}227$ (или $k = 2$) определяется по стандартной плотности нормального распределения (1)

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3.14}} e^{-\frac{(-\ 1{,}227)^2}{2}} = 0{,}188.$$

По формуле (19) dt $= \frac{h}{n} = \frac{3{,}675}{3} = 1{,}225.$

По зависимости (18) определяем искомую вероятность

$$p_n(k) = \varphi(t) \cdot dt = 0{,}188 \cdot 1{,}225 = 0{,}230.$$

Биноминальное распределение позволяет установить следующее значение той же вероятности.

1. По формуле (17) при k = 2 имеем

$$C_n^k = \frac{n\,!}{[k\,!\,(n-k)\,!]} = \frac{3!}{[2!\,(3-2)!]} = 3.$$

2. По биноминальному распределению (16) получаем

$$p_n(k) = C_n^k * q^{n-k} \cdot p^k = 3 \cdot 0{,}667^{(3-2)} \cdot 0{,}333^2 = 0{,}222.$$

Вывод. Даже при числе испытаний n = 3 полученные вероятности по нормальному [$p_n(k)$ = 0,230] и биноминальному [$p_n(k)$ = 0,222] распределениям разошлись только на 0,008, что меньше допустимой ошибки 0,05 и соответствует выводу о возможности использования нормального распределения вместо биноминального при выполнении условия:

$$p > \sqrt{(\frac{1,07}{n})^3} = \sqrt{(1,07/3)^3} = 0,213\ ;\ (0,333>0,213).$$

Пример 2

На двухполосной автомобильной дороге имеется три опасных участка, на каждом из которых необходимо определить вероятность потери информации на дорожных знаках, при изменении количества знаков и движении автомобилей с фиксированной скоростью.

Исходные данные:

На данных участках автомобильной дороги действует следующее количество дорожных знаков: на первом участке имеется 8 знаков, на втором участке – 6 знаков, а на третьем – 4 знака. Необходимо определить на основе оценки экспериментальных данных – все ли знаки успевают воспринять (распознать) 85% водителей при проезде по каждому из опасных участков с допустимой по правилам дорожного движения скоростью 90 км/ч.

В эксперименте участвовало 40 водителей (n=40), которые выполняли обязательное требование, двигаться по указанным участкам дороги с допустимой скоростью (90 км/ч). Для исключения влияния состава движения на результаты исследования все транспортные средства были представлены легковыми автомобилями. После проезда опасного участка дороги автомобили останавливали и опрашивали водителей о количестве дорожных знаков на данном опасном участке дороги, и какую информацию (запрещающую, предупреждающую, предписывающую или информирующую) несут эти знаки.

В ходе данного опроса были получены следующие постоянные вероятности того, что дорожные знаки были восприняты (p) и не восприняты (q) при каждом проезде на трёх участках дороги:

- на первом участке (при наличии 8 знаков) $p_1 = 0{,}28;\ q_1 = 0{,}72;$
- на втором участке (при наличии 6 знаков) $p_2 = 0{,}41;\ q_3 = 0{,}59;$
- на третьем участке (при наличии 4 знаков) $p_2 = 0{,}50;\ q_2 = 0{,}50.$

Найти суммарные вероятности того, что на каждом опасном участке 21 водитель ($k = 21$) из 40 водителей (n = 40) будут терять информацию на дорожных знаках.

Дано:

- на первом участке $n_1 = 40;\ k_1 = 21;\ p_1 = 0{,}28;\ q_1 = 0{,}72;$
- на втором участке $n_2 = 40;\ k_2 = 21;\ p_2 = 0{,}41;\ q_2 = 0{,}59;$
- на третьем участке $n_3 = 40;\ k_3 = 21;\ p_3 = 0{,}50;\ q_3 = 0{,}50.$

По формулам нормального распределения получаем следующие результаты:

1. Определяем по формуле (3) относительное отклонение частоты испытуемого события от его вероятности:

- на первом участке $\xi_1 = 0{,}28 - (21/40) = -0{,}245;$
- на втором участке $\xi_2 = 0{,}41 - (21/40) = -0{,}115;$
- на третьем участке $\xi_3 = 0{,}50 - (21/40) = -0{,}025.$

2. Устанавливаем вспомогательный параметр h по зависимости (4):

- на первом участке дороги $h_1 = \sqrt{\frac{n}{(pq)}} = \sqrt{\frac{40}{(0{,}28*0{,}72)}} = 14{,}086;$
- на втором участке $h_2 = \sqrt{\frac{40}{(0{,}41\cdot 0{,}59)}} = 12{,}859;$
- на третьем участке $h_3 = \sqrt{\frac{40}{(0{,}50\cdot 0{,}50)}} = 12{,}649.$

3. Определяем по формуле (2) величину переменной t нормального распределения:

- на первом участке $t_1 = h_1 \cdot |\xi_1| = 14{,}086 \cdot 0{,}245 = 3{,}451;$
- на втором участке $t_2 = h_2 \cdot |\xi_2| = 12{,}859 \cdot 0{,}115 = 1{,}479;$
- на третьем участке $t_3 = h_3 \cdot |\xi_3| = 12{,}649 \cdot 0{,}025 = 0{,}316.$

4. По формуле (5) устанавливаем математические ожидания нормального распределения (с параметрами биноминального распределения):

- для первого участка $M_1 = n \cdot p_1 = 40 \cdot 0{,}28 = 11{,}200;$
- для второго участка $M_2 = n \cdot p_2 = 40 \cdot 0{,}41 = 16{,}400;$
- для третьего участка $M_3 = n \cdot p_3 = 40 \cdot 0{,}50 = 20{,}000.$

5. По формуле (6) определяем среднеквадратическое отклонение нормального распределения (по параметрам биноминального распределения):

- для первого участка $\sigma_1 = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot q_1} = \sqrt{40 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}72} = 2{,}840;$
- для второго участка $\sigma_2 = \sqrt{n \cdot p_2 \cdot q_2} = \sqrt{40 \cdot 0{,}41 \cdot 0{,}59} = 3{,}111;$
- для третьего участка $\sigma_3 = \sqrt{n \cdot p_3 \cdot q_3} = \sqrt{40 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}50} = 3{,}162.$

8. Определяем параметры x_1^{min} и x_2^{max} по формулам (8) и (9):

- для первого участка

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 11{,}200 - 14{,}086 \cdot 0{,}28 = 7{,}256,$$

$$x_2^{max} = M + t_1 = 11{,}200 + |-3{,}451| = 14{,}651;$$

- для второго участка

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 16{,}400 - 12{,}859 \cdot 0{,}41 = 11{,}128,$$

$$x_2 = M + t_2 = 16{,}400 + 1{,}479 = 17{,}879.$$

- для третьего участка

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 20{,}000 - 12{,}649 \cdot 0{,}5 = 13{,}676,$$

$$x_2 = M + t_2 = 20{,}000 + 0{,}316 = 20{,}316;$$

7. По формуле (10) находим вероятности того, что на каждом опасном участке 21 водитель из 40 водителей будут терять информацию на дорожных знаках со следующими значениями вероятности:

на первом участке:

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{14{,}651 - 11{,}200}{2{,}840}\right] - \Phi\left[\frac{7{,}256 - 11{,}200}{2{,}840}\right] = \Phi(1{,}215) - \Phi(-1{,}215) =$$
$$= \Phi(1{,}215) + \Phi(1{,}389) = 0{,}3878 + 0{,}4175 = 0{,}8053$$

Вывод. 21 водитель в среднем теряет информацию более чем на 6 знаках (0,8053 · 8 = 6,4) из 8 знаков установленных на первом участке при движении со скоростью 90 км/ч.

Примечание: Очевидно, что большое количество знаков и высокая скорость движения приводят к вероятности потери информации на 6 знаках, так как водитель проезжая 25 метров в секунду (90/3,6) не успевает реагировать на все знаки.

на втором участке:

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{17{,}879 - 16{,}400}{3{,}111}\right] - \Phi\left[\frac{11{,}128 - 16{,}400}{3{,}111}\right] = \Phi(0{,}475) - \Phi(-1{,}695) =$$
$$= \Phi(0{,}475) + \Phi(1{,}695) = 0{,}1822 + 0{,}4550 = 0{,}6372.$$

Вывод. 21 водитель в среднем теряет информацию практически на 4 знаках (0,6372 · 6 = 3,8) из 6 знаков, установленных на втором участке дороги, при движении автомобилей со скоростью 90 км/ч.

Примечание: Очевидно, что относительно большое количество знаков на участке дороги и высокая скорость движения приводят к вероятности потери информации на 4 знаках из 6 знаков. Напомним, что скорость движения для обеспечения сравнимости экспериментальных данных оставлена без изменения. Возможно, что снижение скорости движения при установке 6 знаков на сложных для восприятия участках дороги обязательно (необходимо).

на третьем участке:

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{20{,}316 - 20{,}000}{3{,}162}\right] - \Phi\left[\frac{13{,}676 - 20{,}000}{3{,}162}\right] = \Phi(0{,}10) - \Phi(-2{,}00) =$$
$$= \Phi(0{,}10) + \Phi(2{,}00) = 0{,}0398 + 0{,}4472 = 0{,}4870$$

Вывод. 21 водитель в среднем теряет информацию практически на 2 знаках (0,4870 · 4 = 1,9) из 4 знаков установленных на втором участке при движении со скоростью 90 км/ч.

Примечание: Количество «потерянных знаков» уменьшилось с 6 до 2 при уменьшении числа знаков с 8 до 4 на опасных (сложных) участках дороги.

Для уменьшения объёма статьи расчёты вероятностей по биноминальному распределению покажем только в следующем более сложном примере, а здесь отметим, что биноминальное распределение вероятностей в этом примере дало одинаковые результаты с вероятностями, полученными по нормальному закону.

Пример 3

В государстве N нарастает угроза выхода из состава страны 3-х республик. В каждой из этих республик готовится референдум с вопросом: “Вы поддерживаете выход республики R из состава страны N ?”. Ответ предлагается выбирать из двух противоположных решений “да” или “нет”. В ходе подготовки референдумов независимой общественной организацией страны N был проведен выборочный опрос различных слоев населения в пределах данных республик и получены следующие вероятности по 2 тысячам опрошенных:

- в первой республике имеем $p_1 = 0{,}28;\ q_1 = 0{,}72;$
- во второй республике $p_2 = 0{,}50;\ q_2 = 0{,}50;$
- в третьей республике $p_3 = 0{,}72;\ q_3 = 0{,}28.$

На референдумах во всех республиках ожидается, что участие в голосовании примет одинаковое количество людей: по 4 миллиона человек. Проверка частостей p_i во всех республиках при доверительной вероятности 95% (то есть при заданной величине ошибки 5%) показала, что полученные частости практически не несут случайный характер, даже если принять их постоянными вероятностями для всех принимающих участие в референдуме.

Поэтому для всех республик параметр n равен числу голосующих, то есть n = 4000000 человек. Найти суммарные вероятности того, что в каждой республике из 4 миллионов человек 2,1 миллиона (k = 2100000) будут голосовать “да”, то есть поддерживать отделение от страны N при заданной ошибке в 5%. Если эти суммарные вероятности превысят значение 0,50, то выход республик из состава страны предрешен.

Дано:

- в первой республике $n_1 = 4000000;\ k_1 = 2100000;\ p_1 = 0{,}28;\ q_1 = 0{,}72;$
- во второй республике $n_2 = 4000000;\ k_2 = 2100000;\ p_2 =0{,}50;\ q_2 = 0{,}50;$
- в третьей республике $n_3 = 4000000;\ k_3 = 2100000;\ p_3 = 0{,}72;\ q_3 = 0{,}28.$

По формулам нормального распределения получаем.

1. Определяем относительное отклонение частоты испытуемого события от его вероятности по формуле (3):

- в первой республике $\xi_1 = 0{,}28 – (2100000/4000000) = – 0{,}245;$
- во второй республике $\xi_2 = 0{,}50 – (2100000/4000000) = – 0{,}025;$
- в третьей республике $\xi_3 = 0{,}72 – (2100000/4000000) = 0{,}195.$

Примечание. В этом примере показано, что при значительном числе перебираемых через единицу событий k можно учитывать знаки перед отклонениями относительной частоты от вероятностей, что при малых выборках лучше не делать, так как знак «минус», полученный в формуле (3) может исказить результаты исследования.

2. Устанавливаем вспомогательный параметр h по зависимости (4):

- в первой республике $\mathrm{h}_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{pq})}} = \sqrt{\frac{4000000}{(0{,}28*0{,}72)}} = 4454{,}354;$
- во второй республике $\mathrm{h}_2 = \sqrt{\frac{4000000}{(0{,}50\cdot 0{,}50)}} = 4000{,}0;$
- в третьей республике $\mathrm{h}_3 = \sqrt{\frac{4000000}{(0{,}72\cdot 0{,}28)}} = 4454{,}354.$

3. Определяем величину переменной t нормального распределения по формуле (2):

- в первой республике $t_1 = h_1 \cdot \xi = 4454{,}354 \cdot (– 0{,}245) = – 1091{,}317;$
- во второй республике $t_2 = 4000{,}0 \cdot (– 0{,}025) = – 100{,}0;$
- в третьей республике $t_3 = 4454{,}354 \cdot 0{,}195 = 868{,}599.$

4. По формуле (5) определяем математические ожидания нормального распределения (с параметрами биноминального распределения):

- для первой республики $M_1 = n \cdot p_1 = 4000000 \cdot 0{,}28 = 1120000;$
- для второй республики $M_2 = n \cdot p_2 = 4000000 \cdot 0{,}50 = 2000000;$
- для третьей республики $M_3 = n \cdot p_3 = 4000000 \cdot 0{,}72 = 2880000.$

5. По формуле (6) вычисляем среднеквадратическое отклонение нормального распределения (по параметрам биноминального распределения):

- для первой республики $\sigma_1 = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot q_1} = \sqrt{4000000 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}72} = 897{,}998;$
- для второй республики $\sigma_2 = \sqrt{n \cdot p_2 . q_2} = \sqrt{4000000 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}50} = 1000{,}0;$
- для третьей республики $\sigma_3 = \sqrt{n \cdot p_3 . q_3} = \sqrt{4000000 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}28} = 897{,}998$

6. Определяем параметры x_1^{min} и x_2 по формулам (8) и (9):

- для первой республики

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 1120000 - 4454{,}354 \cdot 0{,}28 = 1118752{,}781,$$

$$x_2 = M + t_1 = 1120000 + (-1091{,}317) = 1118908{,}683;$$

- для второй республики

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 2000000 - 4000{,}0 \cdot 0{,}50 = 1998000,$$

$$x_2 = M + t_2 = 2000000 + (-100{,}0) = 1999900;$$

- для третьей республики

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 2880000 - 4454{,}354 \cdot 0{,}72 = 2876792{,}865,$$

$$x_2 = M + t_3 = 2880000 + 868{,}599 = 2880868{,}599.$$

7. По формуле (10) находим вероятности того, что из 4 миллионов проголосовавших 2,1 миллиона человек поддержит отделение от страны N:

- в первой республике:

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{1118908{,}683 - 1120000}{897{,}998}\right] - \Phi\left[\frac{1118752{,}781 - 1120000}{897{,}998}\right] =$$

$$= \Phi(-1{,}22) - \Phi(-1{,}39) = \Phi(1{,}39) - \Phi(1{,}22) = 0{,}4177351 - 0{,}3887671 = 0{,}028968$$

Вывод. В этой республике правительству страны N ни каких дополнительных мер по укреплению государственности принимать не потребуется, так как сепаратисты (националисты) не смогут убедить народ в необходимости отделения от страны N;

- во второй республике:

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{1999900{,}000 - 2000000}{1000{,}000}\right] - \Phi\left[\frac{1998000{,}000 - 2000000}{1000{,}000}\right] =$$

$$= \Phi(-0{,}10) - \Phi(-2{,}00) = \Phi(2{,}00) - \Phi(0{,}10) = 0{,}4772493 - 0{,}0398278 = 0{,}4374215.$$

Вывод. Результаты голосования будут весьма шаткими и поэтому необходимо в срочном порядке разработать и применить ненавязчивые политические технологии, привлекающие людей к борьбе за сохранение единого государства. Например, можно рассмотреть вопрос увеличения финансирования государственных предприятий, связав его с увеличением занятости и с ростом доходов населения. Приемлемы любые решения, связанные с адресным направлением средств на нужды населения;

- в третьей республике

$$P\left(x_1^{min} < X < x_2\right) = \Phi\left[\frac{2880868{,}599 - 2880000}{897{,}998}\right] - \Phi\left[\frac{2876792{,}000 - 2880000}{897{,}998}\right] =$$

$$= \Phi(0{,}97) - \Phi(-3{,}57) = \Phi(0{,}97) + \Phi(3{,}57) = 0{,}3339764 + 0{,}4998209 = 0{,}8337973.$$

Вывод. Ни какие мероприятия (кроме уменьшения параметра k_3 путем незаконного вбрасывания бюллетеней с отрицательными ответами) не помогут изменить ход голосования и поэтому необходимо смириться с предстоящим выходом данной республики из состава страны N. Или под каким-то предлогом отложить (отменить) референдум в данной республике с разработкой срочных и неотложных мер (концепции, проекта) по оздоровлению политического климата в республике.

Используя те же исходные данные, определим вероятности выхода из состава страны N трех республик при помощи биноминального распределения и сравним результаты расчета вероятностей по нормальному и биноминальному законам.

Как уже отмечалось, для решения такого рода задач использовать биноминальное распределение практически невозможно (перебрать через одного голосующего все население республики для расчета вероятности голосования всех участников референдума дело весьма сложное даже для мощных ЭВМ). Однако если выполнить следующие преобразования, позволяющие упростить задачу, то биноминальное распределение становится применимым.

Принимаем за число испытаний n (за число голосующих) результат деления всего электората на 100 тысяч человек. Получаем n = 4000000/100000 = 40 тысяч человек. Таким же образом определяется число k (путем деления числа голосующих положительно на 100 тысяч). Следовательно, k = 2100000/100000 = 21 тысяча человек.

Пересчитываем все параметры нормального закона с характеристиками биноминального распределения.

Получаем:

$$p_1 = 0{,}28;\ p_2 = 0{,}50;\ p_3 = 0{,}72;$$

$$\xi_1 = -0{,}245;\ \xi_2 = -0{,}025;\ \xi_3 = 0{,}195;$$

$$h_1 = 14{,}086;\ h_2 = 12{,}649;\ h_3 = 14{,}086;$$

$$t_1 = -3{,}451;\ t_2 = -0{,}316;\ t_3 = 2{,}747;$$

$$M_1 = 11{,}2;\ M_2 = 20{,}0;\ M_3 = 28{,}8;$$

$$\sigma_1 = 2{,}840;\ \sigma_2 = 3{,}162;\ \sigma_3 = 2{,}840;$$

$$P\ (x_1^{min} < X < x_2) =:\ 0{,}028968;\ 0{,}4374215;\ 0{,}8337973.$$

Сравнительная оценка, полученных вероятностей $P\ (x_1^{min} < X < x_2)$ показала, что выполненные преобразования не изменили значений суммарных вероятностей и, следовательно, биноминальное распределение (если мы считаем возможной замену этого закона нормальным распределением) должно дать такие же результаты.

После отмеченных преобразований имеем три биноминальных распределения для трех республик с параметрами:

$$p1 = 0{,}28;\ p2 = 0{,}50;\ p3 = 0{,}72;$$

$$q1 = 0{,}72;\ q2 = 0{,}50;\ q3 = 0{,}28;$$

$$n = 40;\ n = 40;\ n = 40;$$

$$k_1^{min} = 0;\ k_1^{min} = 0;\ k_1^{min} = 0;$$

$$k^{max} = 21;\ k^{max} = 21;\ k^{max} = 21.$$

Расчеты вероятностей будем вести для каждой республики отдельно.

Для первой республики (I)

I. Определить суммарную вероятность такого события, при котором в первой республике на референдуме проголосует за отделение от страны N до 21 тысячи человек из каждых 40 тысяч голосующих (при вероятности положительного голосования в каждой тысяче человек p = 0,28).

1. По зависимости (4) определяем значение вспомогательного параметра h:

$$h = \sqrt{\frac{n}{(p \cdot q)}} = \sqrt{\frac{40}{(0{,}28 \cdot 0{,}72)}} = 14{,}086.$$

2. По формуле (5) устанавливаем математическое ожидание биноминального распределения $M = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}28 = 11{,}2 \approx 11.$

3. По выражению (8) находим начальную координату биноминального распределения, при которой k = 0

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 11 - 14{,}086 \cdot 0{,}28 = 7{,}06.$$

4. Определяем конечную координату (x_2), до которой необходимо просуммировать вероятности, полученные по биноминальному распределению. Для этого по формуле (9) определяем промежуточный параметр t_2:

$$t_2 = h[p - \frac{k^{max}}{n}] = 14{,}086(0{,}28 - \frac{21}{40}) = -3{,}451.$$

Применяя формулу (10), убеждаемся, что конечная координата (x_2) больше начальной координаты (x_1^{min})

$$x_2 = M + t_2 = 11 + (-3{,}451) = 7{,}549\ (7{,}549 > 7{,}06).$$

5. По зависимости (13) определяем порядковый номер m конечного числа исходов (km):

$$m = p(n + 1) + t_2 - 1 = 0{,}28(40 + 1) + (-3{,}451) - 1 = 7{,}029 \approx 7.$$

Следовательно, $k_m = k_7$.

6. Используя формулы (17) и (16) при семи значениях *k* ($k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$, $k_5 = 4$, $k_6 = 5$ *и* $k_7 = k_m = 6$), получаем:

- при $k_1 = 0$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[0!\,(40-0)!]} = 1,$

$$p_n(k_1 = 0) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 1 \cdot 0{,}72^{(40-0)} \cdot 0{,}28^0 = 0{,}000001964;$$

- при $k_2 = 1$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[1!\,(40-1)!]} = 40,$

$$p_n(k_2 = 1) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 40 \cdot 0{,}72^{(40-1)} \cdot 0{,}28^1 = 0{,}000030562;$$

- при $k_3 = 2$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[2!\,(40-2)!]} = 780,$

$$p_n(k_3 = 2) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 780 \cdot 0{,}72^{(40-2)} \cdot 0{,}28^2 = 0{,}00023176;$$

- при $k_4 = 3$: $C_n^k = \frac{40!}{[3!\,(40-3)!]} = 9880,$

$$p_n(k_4 = 3) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 9880 \cdot 0{,}72^{(40-3)} \cdot 0{,}28^3 = 0{,}0011416;$$

- при $k_5 = 4$: $C_n^k = \frac{40!}{[4!\,(40-4)!]} = 91390,$

$$p_n(k_5 = 4) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 91390 \cdot 0{,}72^{(40-4)} \cdot 0{,}28^4 = 0{,}0041067;$$

- при $k_6 = 5$: $C_n^k = \frac{40!}{[5!\,(40-5)!]} = 658008,$

$$p_n(k_6 = 5) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 658008 \cdot 0{,}72^{(40-5)} \cdot 0{,}28^5 = 0{,}00114989;$$

- при $k_7 = 6\ C_n^k = \frac{40!}{[6!\,(40-6)!]} = 3838380,$

$$p_n(k_7 = 6) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 3838380 \cdot 0{,}72^{(40-6)} \cdot 0{,}28^6 = 0{,}026085.$$

8. Сумму вероятностей биноминального распределения устанавливаем по формуле (12). Получаем

$$P_n(k) = p_n(0) + p_n(1) + \dots + p_n(k_m) = 0{,}043097287 \approx 0{,}043.$$

По нормальному распределению при интегрировании плотности вероятностей от x_1^{min} до x_2 (см. выше) получили

$$P(x_1^{min} < X < x_2) = P_n(k) = 0{,}028968 \approx 0{,}029.$$

Расхождение результатов расчета составляет 0,014 (0,043 – 0,029), что меньше допуска на отклонение, равного 0,05. Но и сами вероятности ожидаемого события меньше допуска на отклонение, что тоже должно учитываться при решении вопроса о возможности перехода от биноминального распределения к нормальному.

Для второй республики (II)

II. Определить суммарную вероятность того, что во второй республике на референдуме проголосует за отделение от страны N до 21 тысячи человек из каждых 40 тысяч голосующих (при ожидаемой вероятности положительного голосования в каждой тысяче человек p = 0,50).

1. По зависимости (4) определяем значение параметра h:

$$h = \sqrt{\frac{n}{(p \cdot q)}} = \sqrt{\frac{40}{(0{,}50 \cdot 0{,}50)}} = 12{,}649.$$

2. По формуле (5) устанавливаем математическое ожидание биноминального распределения $M = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}50 = 20.$

3. По выражению (8) находим начальную координату биноминального распределения, при которой k = 0

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 20 - 12{,}649 \cdot 0{,}50 = 13{,}676.$$

4. Для этого по формуле (9) определяем промежуточный параметр t_2

$$t_2 = h[p - \frac{k^{max}}{n}] = 12{,}649(0{,}50 - \frac{21}{40}) = -\ 0{,}316.$$

Применяя формулу (10), убеждаемся, что конечная координата (x_2) больше начальной координаты (x_1^{min})

$$x_2 = M + t_2 = 20 + (-0{,}316) = 19{,}684 \ (19{,}684 > 13{,}676).$$

5. По зависимости (14) определяем порядковый номер m конечного числа исходов (k_m):

$$m = M + t_2 = 20 + (-0{,}316) = 19{,}684 \approx 20.$$

Следовательно, $k_m = k_{20}$.

6. Используя формулы (17) и (16) при двадцати значениях k ($k_1 = 0$, $k_2 = 1$, …, $k_{20} = k_m = 19$), получаем:

- при $k_1 = 0$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[0!\,(40-0)!]} = 1,$

$$p_n(k_1 = 0) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 1 \cdot 0{,}50^{(40-0)} \cdot 0{,}50^0 = 9{,}095 \cdot 10^{-13};$$

- при $k_2 = 1$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[1!\,(40-1)!]} = 40,$

$$p_n(k_2 = 1) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 40 \cdot 0{,}50^{(40-1)} \cdot 0{,}50^1 = 3{,}6379 \cdot 10^{-11};$$

- при $k_3 = 2$: $C_n^k = \frac{n!}{[k!\,(n-k)!]} = \frac{40!}{[2!\,(40-2)!]} = 780,$

$$p_n(k_3 = 2) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 780 \cdot 0{,}50^{(40-2)} \cdot 0{,}50^2 = 7{,}094 \cdot 10^{-10};$$

- при $k_4 = 3$: $C_n^k = \frac{40!}{[3!\,(40-3)!]} = 9880,$

$$p_n(3) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 9880 \cdot 0{,}50^{(40-3)} \cdot 0{,}50^3 = 8{,}00 \cdot 10^{-9};$$

- при $k_5 = 4$: $C_n^k = \frac{40!}{[4!\,(40-4)!]} = 91390,$

$$p_n(4) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 91390 \cdot 0{,}50^{(40-4)} \cdot 0{,}50^4 = 8{,}3 \cdot 10^{-8};$$

- при $k_6 = 5$: $C_n^k = \frac{40!}{[5!\,(40-5)!]} = 658008,$

$$p_n(5) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 658008 \cdot 0{,}50^{(40-5)} \cdot 0{,}50^5 = 5{,}98 \cdot 10^{-7};$$

- при $k_7 = 6$ $C_n^k = \frac{40!}{[6!\,(40-6)!]} = 3838380,$

$$p_n(6) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 3838380 \cdot 0{,}50^{(40-6)} \cdot 0{,}50^6 = 0{,}00000349;$$

- при $k_8 = 7$ $C_n^k = \frac{40!}{[7!\,(40-7)!]} = 3838380,$

$$p_n(7) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 3838380 \cdot 0{,}50^{(40-7)} \cdot 0{,}50^7 = 0{,}00001696.$$

. . . .

. . . .

- при $k_{20} = 19$ $C_n^k = \frac{40!}{[19!\,(40-19)!]} = 1{,}312824 \cdot 10\ 11,$

$$p_n(19) = C_n^k \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}} \cdot \mathrm{p}^k = 1{,}312824 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}50^{(40-19)} \cdot 0{,}50^{19} = 0{,}119.$$

Результаты расчета всех вероятностей показаны в табл. 1.

Таблица 1

Вероятности биноминального распределения

k_{ij}	$p_n(k_{ij})$	k_{ij}	$p_n(k_{ij})$	k_{ij}	$p_n(k_{ij})$
0	$9{,}095 \cdot 10^{-13}$	7	0,00001696	14	0,021106578
1	$3{,}63798 \cdot 10^{-11}$	8	0,000069944	15	0,036584738
2	$7{,}094 \cdot 10^{-10}$	9	0,000248691	16	0,057163652
3	$8{,}000 \cdot 10^{-9}$	10	0,000770942	17	0,080701627
4	$8{,}300 \cdot 10^{-8}$	11	0,002102571	18	0,103118745
5	$5{,}980 \cdot 10^{-7}$	12	0,005081213	19	0,119400647
6	0,00000349	13	0,01094415	-	-

7. Сумму вероятностей биноминального распределения устанавливаем по формуле (12). Получаем

$$P_n(k) = p_n(0) + p_n(1) + \dots + p_n(k_m) = 0{,}43731464 \approx 0{,}437$$

По нормальному распределению при интегрировании плотности вероятностей от x_1^{min} до x_2 (см. выше) получили

$$P(x_1^{min} < X < x_2) = P_n(k) = 0{,}4374215 \approx 0{,}437$$

Расхождение суммарных вероятностей, рассчитанных по нормальному и биноминальному распределениям при $p = 0{,}50$, практически отсутствует.

Для третьей республики (III)

III. Определить суммарную вероятность того, что в третьей республике на референдуме проголосует за отделение от страны N до 21 тысячи человек из каждых 40 тысяч голосующих (при ожидаемой вероятности положительного голосования в каждой тысяче человек $p = 0{,}72$).

1. По зависимости (4) находим

$$h = \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} = \sqrt{\frac{40}{0{,}72 \cdot 0{,}28}} = 14{,}086.$$

2. По формуле (5) устанавливаем $M = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}72 = 28{,}8 \approx 29.$

3. По выражению (8) определяем

$$x_1^{min} = M - h \cdot p = 29 - 14{,}086 \cdot 0{,}72 = 10{,}142.$$

4. По формуле (9) устанавливаем верхний предел суммирования вероятностей

$$t_2 = h[p - \frac{k^{max}}{n}] = 14{,}086(0{,}72 - \frac{21}{40}) = 2{,}747.$$

И по формуле (10) определяем конечную координату (x_2), до которой необходимо просуммировать вероятности, полученные по биноминальному распределению

$$x_2 = M + t_2 = 29 + 2{,}747 = 31{,}747.$$

При этом убеждаемся, что конечная координата (x_2) больше начальной координаты (x_1^{min})

$$(31{,}747 > 10{,}142).$$

5. По формуле (15) определяем последний порядковый номер значения k_m^{max} $m = p(n + 1) + t_2 = 0{,}72(40 + 1) + 2{,}747 = 32{,}267 \approx 32$.

Следовательно, $k_m^{max} = k_{32}$.

6. По формуле (16) при 32-х значениях k ($k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 2, \ldots$, $k_{32} = k_m = 31$), получаем:

- при $k_1 = 0$: $p_n(0) = C_n^k \cdot q^{n-k} \cdot p^k = 1 \cdot 0{,}28^{(40-0)} \cdot 0{,}72^0 =$ $= 7{,}6969958 \cdot 10^{-23}$;

. . . .

. . . .

- при $k_{14} = 13$: $p_n(13) = 1{,}2033222 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}28^{(40-13)} \cdot 0{,}72^{13} =$ $= 0{,}000000199$;
- при $k_{15} = 14$: $p_n(14) = 2{,}3206929 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}28^{(40-14)} \cdot 0{,}72^{14}$ $= 0{,}000000987$;

. . . .

. . . .

- при $k_{30} = 29$: $p_n(29) = 2311801440 \cdot 0{,}28^{(40-29)} \cdot 0{,}72^{29} = 0{,}139743388$;
- при $k_{31} = 30$: $p_n(30) = 847660528 \cdot 0{,}28^{(40-30)} \cdot 0{,}72^{30} = 0{,}131758052$;
- при $k_{32} = 31$: $p_n(31) = 847660528 \cdot 0{,}28^{(40-31)} \cdot 0{,}72^{31} = 0{,}109292393$;

7. По формуле (12) получаем сумму вероятностей биномиального распределения

$$P_n(k) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + p_n(k_m) = 0{,}828588042 \approx 0{,}829.$$

Таблица 2

Вероятности биноминального распределения

k_{ij}	$p_n(k_{ij})$	k_{ij}	$p_n(k_{ij})$	k_{ij}	$p_n(k_{ij})$
0	$7{,}6969958 \cdot 10^{-23}$	11	$5{,}000 \cdot 10^{-9}$	22	0,009219278
1	$7{,}9169100 \cdot 10^{-21}$	12	$3{,}500 \cdot 10^{-8}$	23	0,018553082
2	$3{,}9697648 \cdot 10^{-19}$	13	0,000000199	24	0,033793114
3	$1{,}2930091 \cdot 10^{-17}$	14	0,000000987	25	0,055613811
4	$3{,}0755145 \cdot 10^{-16}$	15	0,000004399	26	0,082504002
5	$5{,}6940955 \cdot 10^{-15}$	16	0,000017677	27	0,110005333
6	$8{,}5411433 \cdot 10^{-14}$	17	0,000064175	28	0,131332907
7	$1{,}0667713 \cdot 10^{-12}$	18	0,000210862	29	0,139743388
8	$1{,}1315396 \cdot 10^{-11}$	19	0,00062783	30	0,131758052
9	$1{,}0345505 \cdot 10^{-10}$	20	0,001695143	31	0,109292393
10	$8{,}2468456 \cdot 10^{-10}$	21	0,00415137	-	-

По нормальному распределению (см. выше) было получено

$$P(x_1^{min} < X < x_2) = P_n(k) = 0{,}8337973 \approx 0{,}834.$$

Расхождение суммарных вероятностей, рассчитанных по нормальному и биноминальному распределениям, при p = 0,72 составляет 0,005. Это расхождение на порядок меньше, чем допуск на отклонение, равный 0,05.

На рис. 1 показано изменение этих вероятностей в зависимости от принятого числа участников референдума (k_m), голосующих за отделение каждой республики из состава страны N. Так, если в расчете суммарных вероятностей зададимся, что из 4 миллионов человек 2,9 миллиона человек проголосуют за отделение республик, то вероятность этого события составит:

1) по формулам нормального распределения

- для первой республики (при p = 0,28) $P(x_1^{min} < X < x_2) = 0$;
- для второй республики (при p = 0,50) $P(x_1^{min} < X < x_2) = 0{,}161$;
- для третьей республики (при p = 0,72) $P(x_1^{min} < X < x_2) = 0{,}498$;

2) по формулам биноминального распределения

- для первой республики (при p = 0,28 и $k_m = k_4$) $\sum P_n(k) = 0{,}001$;
- для второй республики (при p = 0,50 и $k_m = k_{17}$) $\sum P_n(k) = 0{,}134$;
- для третьей республики (при p = 0,72 и $k_m = k_{29}$) $\sum P_n(k) = 0{,}448$.

На рис. 1 эти расхождения при любых значениях k_m отразить графически не возможно (соответствующие кривые нормального и биноминального распределений сливаются). По данным рис. 1 видно, что чем больше принято в расчете число людей (k_m), голосующих положительно, тем заметнее снижается вероятность того, что найдется такое количество людей (голосующих за отделение от страны N). Вероятность того, что все население проголосует за отделение равна нулю (см. рис. 1 при k_m = n). Для первой республики вероятность равная нулю охватывает большое количество людей, а для третьей республики вероятность равная единице охватывает примерно такое же количество людей (этого и следовало ожидать, так как в приведенных примерах эти республики имеют зеркальные вероятности p и q). Событие (k_m 0) соответствует тому, что найдется хотя бы один человек голосующий за отделение республики от страны N. Вероятность появления такого события равна единице (см. рис. 1).

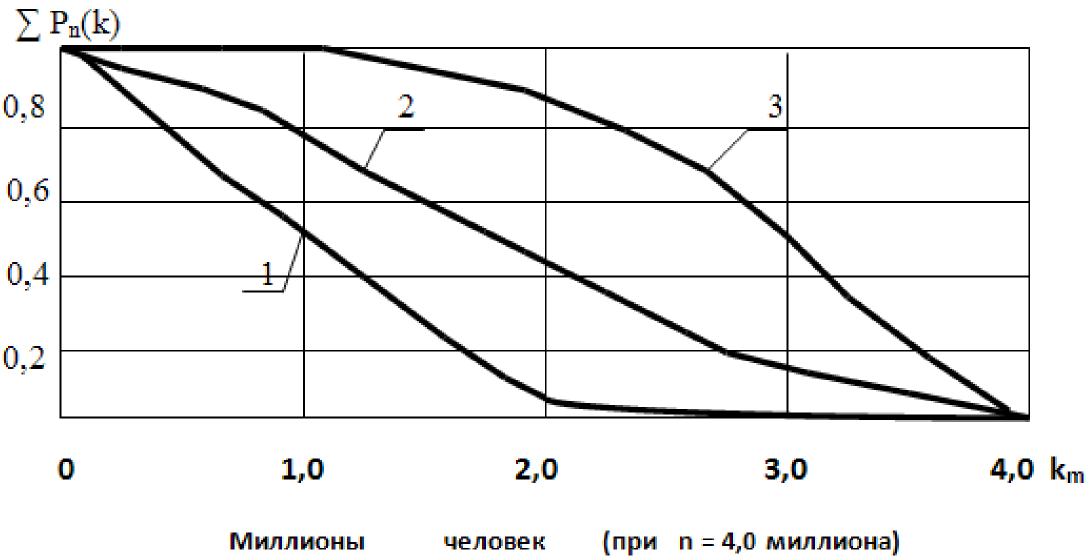

Рисунок 1. *Вероятность голосования за отделение республик от страны N в зависимости от принятого (ожидаемого) числа людей (km) голосующих за это событие: 1, 2, 3 – номера республик*

Вывод. Выполненные расчеты показывают, что с использованием нормального закона, основанного на параметрах биноминального распределения, появляется возможность прогнозирования итогов предстоящего голосования, если исходная вероятность p определена достаточно точно. Данные методики могут быть использованы в теории риска [6, 7, 8, 9, 10] при статистической обработке дискретных величин, например, при определении вероятности того, что число автомобилей в пачке будет соответствовать заданной величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вероятностные методы в инженерных задачах / Лебедев А.Н., Куприянов М.С., Недосекин Д.Д., Чернявский Е.А. // Справочник. – СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отд., 2000. – 333 с.
2. Смирнов Н.В., Белугин Д.А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. – М.: Недра, 1979. – 384 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистики / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.
4. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977. – 368 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
6. Столяров В.В. Введение в теорию риска / В.В. Столяров // Повышение эффективности эксплуатации транспорта: межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 2003. С. 118 – 139.
7. Столяров В.В. Дорожные условия и организация движения с использованием теории риска: учеб. пособие / В.В. Столяров – Саратов: СГТУ, 1999. – 168 с.
8. Столяров В.В. Проектирование автомобильных дорог с учетом теории риска: монография в 2 частях, Ч. 1 / В.В. Столяров – Саратов: СГТУ, 1994. – 184 с.
9. Столяров В.В. Проектирование автомобильных дорог с учетом теории риска: монография в 2 частях, Ч. 2 / В.В. Столяров – Саратов: СГТУ, 1994. – 232 с.
10. Столяров В.В. Проектирование автомобильных дорог по условию обеспечения безопасности движения с использованием теории риска: дис. … д-ра техн. наук / В.В. Столяров. – М., 1995. – 337 с.
11. Столяров В.В. Теория риска в проектировании плана дороги и организации движения: учеб. пособие / В.В. Столяров – Саратов: СГТУ, 1995. – 84 с.
12. Столяров В.В. Экспертиза дорожно-транспортных происшествий на основе теории риска: учеб. пособие / В.В. Столяров – Саратов: СГТУ, 1996. – 176 с.
13. Столяров В.В. Теория риска в судебно-технической экспертизе дорожно-транспортных происшествий: монография / В.В. Столяров – Саратов: Издательский дом «МарК», 2010. – 412 с.
14. Столяров В.В. Совершенствование методов применения принципов технического регулирования в дорожной деятельности: монография / В.В. Столяров, А.П. Бажанов. – Пенза: ПГУАС. 2014. – 212 с.
15. Столяров В.В. Оценка надёжности нежёстких дорожных одежд на основе законов распределения общих модулей упругости / В.В. Столяров, Е.Е. Зверкова, А.С.

Фомина, Ю.М. Аникин // Дороги и мосты. – М.: Росавтодор, 2013. Т1. №29/1. С. 153 – 176.

16. Столяров В.В. Новый подход к гамма-распределению при обосновании расчётных расходов мостовых переходов / В.В. Столяров, Э.Ю. Шмагина // Известия Орловского ГТУ. Серия: Строительство и транспорт. – Орёл: 2007. №3-15. С. 67 – 69.
17. Столяров В.В. Теория риска в судебно-технической экспертизе дорожно-транспортных происшествий с участием пешеходов (+ABS): монография / В.В. Столяров. – Саратов: СГТУ, 2010. – 344 с.
18. Столяров В.В. Технико-экономическое обоснование модернизации сети автомобильных дорог / В.В. Столяров, Д.М. Немчинов // Дороги и мосты. – М.: Росавтодор, 2015. №34/2. С. 13 – 50.
19. Столяров В.В. Математическая модель транспортного потока, основанная на микроскопической теории «следования за лидером» / В.В. Столяров, Д.М. Немчинов, В.А. Гусев, Н.В. Щёголева // Дороги и мосты. – М.: Росавтодор, 2015. №34/2. С. 291 – 318.
20. Щёголева Н.В. Риск потери информации как обобщённая характеристика водителя при проектировании и эксплуатации автомобильных дорог: автореф. дис. … канд. техн. наук / Н.В. Щёголева. – Волгоград, 2006. – 24 с.
21. Щёголева Н.В. Учет суммарной энтропии дорожно-транспортных ситуаций при определении риска потери информации [Электронный ресурс] / Н.В. Щеголева // Техническое регулирование в транспортном строительстве. - 2015. - №2 (10). - с. 5. - Библиогр. в конце ст. - Загл. с титул. экрана. - URL: http://trts.esrae.ru/16-72.
22. Щёголева Н.В. К вопросу о применении теории информации в проектировании дорог [Текст] / Н.В. Щеголева // Ресурсо- и энергоэффективные технологии в строительном комплексе региона: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. / СГТУ. - Саратов, 2014. - С. 381-384.
23. Щёголева Н.В. Применение теории риска в проектировании реконструкции автомобильных дорог [Текст] / Н.В. Щеголева, О.Н. Артемова // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. тр. XXV междунар. науч. конф., г. Волгоград, 29 мая - 31 мая 2012 г.: в 10 т. - Саратов, 2012. - Т. 10. - С. 77-79.
24. Щёголева Н.В. Автоматизация расчета риска при реконструкции опасного участка автомобильной дороги [Текст] / Н.В. Щеголева, В.А. Гусев // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. тр. XXV междунар. науч. конф., г. Волгоград, 29 мая - 31 мая 2012 г.: в 10 т. - Саратов, 2012. - Т. 10. - С. 79-81.
25. Щёголева Н.В. Оценка вероятности потери информации водителями с использованием теории риска [Текст] / Н.В. Щеголева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. - 2011. - №1. - С. 160-165.
26. Ворожейкин М.А. Применение теории риска для реконструкции геометрических параметров кривой в плане [Текст] / М.А. Ворожейкин, Н.В. Щеголева // Инновации и исследования в транспортном комплексе: материалы III междунар. науч.-практ. конф. в год 70-летия победы в Великой Отечественной войне, г. Курган, 5-6 июня 2015 г.: в 2 ч. - Курган, 2015. - Ч. 2 . - С. 178-181.

Stolyarov Viktor Vasilevich
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: stolyarov_v_v@mail.ru

Shchegoleva Natalia Vyacheslavovna
Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov
E-mail: Shegoleva123@mail.ru

Examples of probability calculation in processing digital data using the normal and binomial distributions

Abstract. In solving problems associated with statistical processing of discrete integer values varying sequentially per unit it is handier to use conversions of A. Moivre that were made for the transition from the discrete binomial distribution to continuous distribution later called normal. The normal distribution law of Moivre (Moivre - Laplace, Gauss) is widely used in the statistical processing of continuous variables and undeservedly seldom used in original form suitable for processing discrete integer values varying per unit. In a series of articles the authors show the advantages of this method in solving applied problems related to the processing of integer variables. This article in compressed form shows the basic calculation formulae, allowing to use the opportunities of continuous distribution while statistical processing of the integer variables. Examples of such calculations are presented from different branches of science or technology: management, technical (on the subject of transport construction) and community activities. In all the examples of the probability calculation while processing of discrete data the comparison of results obtained for the normal and binomial distribution was performed. Replacement of the binomial distribution by the normal law leads to a significant reduction in the volume of calculations without dilution of precision of the obtained results under the control of applicability of the normal distribution according to the formula of the boundary condition.

Keywords: probability density; Laplace function; function of the normal distribution; binomial distribution of discrete integer values; mathematical expectation and mean value; mean-square deviation; independent variables or factors; critical parameters; limit of the applicability of the normal law instead of binomial distribution

REFERENCES

1. Veroyatnostnye metody v inzhenernykh zadachakh / Lebedev A.N., Kupriyanov M.S., Nedosekin D.D., Chernyavskiy E.A. // Spravochnik. – SPb.: Energoatomizdat. Sankt-Peterburgskoe otd., 2000. – 333 s.
2. Smirnov N.V., Belugin D.A. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika v prilozhenii k geodezii. – M.: Nedra, 1979. – 384 s.
3. Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki / V.S. Korolyuk, N.I. Portenko, A.V. Skorokhod, A.F. Turbin. – M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1985. – 640 s.
4. Bol'shakov V.D., Gaydaev P.A. Teoriya matematicheskoy obrabotki geodezicheskikh izmereniy. – M.: Nedra, 1977. – 368 s.
5. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike. – M.: GITTL, 1956. – 608 s.
6. Stolyarov V.V. Vvedenie v teoriyu riska / V.V. Stolyarov // Povyshenie effektivnosti ekspluatatsii transporta: mezhvuz. nauch. sb. Saratov: SGTU, 2003. S. 118 – 139.
7. Stolyarov V.V. Dorozhnye usloviya i organizatsiya dvizheniya s ispol'zovaniem teorii riska: ucheb. posobie / V.V. Stolyarov – Saratov: SGTU, 1999. – 168 s.
8. Stolyarov V.V. Proektirovanie avtomobil'nykh dorog s uchetom teorii riska: monografiya v 2 chastyakh, Ch. 1 / V.V. Stolyarov – Saratov: SGTU, 1994. – 184 s.
9. Stolyarov V.V. Proektirovanie avtomobil'nykh dorog s uchetom teorii riska: monografiya v 2 chastyakh, Ch. 2 / V.V. Stolyarov – Saratov: SGTU, 1994. – 232 s.
10. Stolyarov V.V. Proektirovanie avtomobil'nykh dorog po usloviyu obespecheniya bezopasnosti dvizheniya s ispol'zovaniem teorii riska: dis. … d-ra tekhn. nauk / V.V. Stolyarov. – M., 1995. – 337 s.
11. Stolyarov V.V. Teoriya riska v proektirovanii plana dorogi i organizatsii dvizheniya: ucheb. posobie / V.V. Stolyarov – Saratov: SGTU, 1995. – 84 s.
12. Stolyarov V.V. Ekspertiza dorozhno-transportnykh proisshestviy na osnove teorii riska: ucheb. posobie / V.V. Stolyarov – Saratov: SGTU, 1996. – 176 s.
13. Stolyarov V.V. Teoriya riska v sudebno-tekhnicheskoy ekspertize dorozhno-transportnykh proisshestviy: monografiya / V.V. Stolyarov – Saratov: Izdatel'skiy dom «MarK», 2010. – 412 s.
14. Stolyarov V.V. Sovershenstvovanie metodov primeneniya printsipov tekhnicheskogo regulirovaniya v dorozhnoy deyatel'nosti: monografiya / V.V. Stolyarov, A.P. Bazhanov. – Penza: PGUAS. 2014. – 212 s.
15. Stolyarov V.V. Otsenka nadezhnosti nezhestkikh dorozhnykh odezhd na osnove zakonov raspredeleniya obshchikh moduley uprugosti / V.V. Stolyarov, E.E. Zverkova, A.S. Fomina, Yu.M. Anikin // Dorogi i mosty. – M.: Rosavtodor, 2013. T1. №29/1. S. 153 – 176.
16. Stolyarov V.V. Novyy podkhod k gamma-raspredeleniyu pri obosnovanii raschetnykh raskhodov mostovykh perekhodov / V.V. Stolyarov, E.Yu. Shmagina // Izvestiya Orlovskogo GTU. Seriya: Stroitel'stvo i transport. – Orel: 2007. №3-15. S. 67 – 69.

17. Stolyarov V.V. Teoriya riska v sudebno-tekhnicheskoy ekspertize dorozhno-transportnykh proisshestviy s uchastiem peshekhodov (+ABS): monografiya / V.V. Stolyarov. – Saratov: SGTU, 2010. – 344 s.
18. Stolyarov V.V. Tekhniko-ekonomicheskoe obosnovanie modernizatsii seti avtomobil'nykh dorog / V.V. Stolyarov, D.M. Nemchinov // Dorogi i mosty. – M.: Rosavtodor, 2015. №34/2. S. 13 – 50.
19. Stolyarov V.V. Matematicheskaya model' transportnogo potoka, osnovannaya na mikroskopicheskoy teorii «sledovaniya za liderom» / V.V. Stolyarov, D.M. Nemchinov, V.A. Gusev, N.V. Shchegoleva // Dorogi i mosty. – M.: Rosavtodor, 2015. №34/2. S. 291 – 318.
20. Shchegoleva N.V. Risk poteri informatsii kak obobshchennaya kharakteristika voditelya pri proektirovanii i ekspluatatsii avtomobil'nykh dorog: avtoref. dis. … kand. tekhn. nauk / N.V. Shchegoleva. – Volgograd, 2006. – 24 s.
21. Shchegoleva N.V. Uchet summarnoy entropii dorozhno-transportnykh situatsiy pri opredelenii riska poteri informatsii [Elektronnyy resurs] / N.V. Shchegoleva // Tekhnicheskoe regulirovanie v transportnom stroitel'stve. - 2015. - №2 (10). - s. 5. - Bibliogr. v kontse st. - Zagl. s titul. ekrana. - URL: http://trts.esrae.ru/16-72.
22. Shchegoleva N.V. K voprosu o primenenii teorii informatsii v proektirovanii dorog [Tekst] / N.V. Shchegoleva // Resurso- i energoeffektivnye tekhnologii v stroitel'nom komplekse regiona: sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. / SGTU. - Saratov, 2014. - S. 381-384.
23. Shchegoleva N.V. Primenenie teorii riska v proektirovanii rekonstruktsii avtomobil'nykh dorog [Tekst] / N.V. Shchegoleva, O.N. Artemova // Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh - MMTT-25: sb. tr. XXV mezhdunar. nauch. konf., g. Volgograd, 29 maya - 31 maya 2012 g.: v 10 t. - Saratov, 2012. - T. 10. - S. 77-79.
24. Shchegoleva N.V. Avtomatizatsiya rascheta riska pri rekonstruktsii opasnogo uchastka avtomobil'noy dorogi [Tekst] / N.V. Shchegoleva, V.A. Gusev // Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh - MMTT-25: sb. tr. XXV mezhdunar. nauch. konf., g. Volgograd, 29 maya - 31 maya 2012 g.: v 10 t. - Saratov, 2012. - T. 10. - S. 79-81.
25. Shchegoleva N.V. Otsenka veroyatnosti poteri informatsii voditelyami s ispol'zovaniem teorii riska [Tekst] / N.V. Shchegoleva // Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Okhrana okruzhayushchey sredy, transport, bezopasnost' zhiznedeyatel'nosti. - 2011. - №1. - S. 160-165.
26. Vorozheykin M.A. Primenenie teorii riska dlya rekonstruktsii geometricheskikh parametrov krivoy v plane [Tekst] / M.A. Vorozheykin, N.V. Shchegoleva // Innovatsii i issledovaniya v transportnom komplekse: materialy III mezhdunar. nauch.-prakt. konf. v god 70-letiya pobedy v Velikoy Otechestvennoy voyne, g. Kurgan, 5-6 iyunya 2015 g.: v 2 ch. - Kurgan, 2015. - Ch. 2 . - S. 178-181.