

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2023, Том 10, № 3 / 2023, Vol. 10, Iss. 3 <https://t-s.today/issue-3-2023.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/05SATS323.pdf>

DOI: 10.15862/05SATS323 (<https://doi.org/10.15862/05SATS323>)

2.1.9. Строительная механика (технические науки)

Применение обобщённых функций и интегрального преобразования Фурье при моделировании воздействия подвижной нагрузки на балку, лежащую на упругом основании

¹Курбацкий Е.Н., ²Зернов И.И., ^{1,3,4}Бадьина Е.С.

¹ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия

²АО «Мосгипротранс», Москва, Россия

³ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский

Московский государственный строительный университет», Москва, Россия

⁴ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук», Москва, Россия

Автор, ответственный за переписку: Курбацкий Евгений Николаевич, e-mail: dynamic.miit@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена моделированию поведения бесконечно-длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании, при действии сосредоточенной подвижной нагрузки. Моделирование произведено в контексте определения воздействия высокоскоростного подвижного состава на верхнее строение пути. При разработке метода решения задач использованы известные положения теории упругости, теории распространения волн, теории функций комплексной переменной, а также интегральные преобразования обобщённых функций. Подвижная сосредоточенная сила представлена δ -функцией Дирака. Для решения уравнения движения и определения прогибов балки используется интегральное преобразование Фурье. Для вычисления значений прогибов в пространстве оригиналов применяется контурное интегрирование с помощью теоремы Коши о вычетах. Определён общий вид зависимости прогибов в балке от скорости движения нагрузки. Показано, что значения прогибов балки возрастают с увеличением скорости подвижной нагрузки. Показано, как скорость движения нагрузки влияет на характер зависимости прогиба балки от

времени. Решения приведены для моделей балок на упругом основании Эйлера-Бернулли, Рэлея и Тимошенко. Произведено сравнение поведения рассмотренных математических моделей. Показано, что характер взаимодействия балки с подвижной нагрузкой, значения прогибов, а также характер достижения критических скоростей несущественно различаются для рассмотренных моделей балок. Проанализирован характер достижения максимального прогиба в области приложения подвижной нагрузки. Показано, что максимальные значения прогибов балок на упругом основании возникают за движущейся нагрузкой. Представленная методика может быть использована для оценки воздействия подвижного состава на верхнее строение пути, в том числе при проектировании высокоскоростных линий.

Ключевые слова: динамика сооружений; подвижная нагрузка; балка на упругом основании; балка Эйлера-Бернулли; балка Рэлея; балка Тимошенко; обобщённые функции; преобразование Фурье; теория вычетов

Application of generalised functions and Fourier's integral transformation in modelling the effect of a moving load on a beam resting on an elastic foundation

¹Evgeny N. Kurbatskiy, ²Ivan I. Zernov, ^{1,3,4}Elena S. Badina

¹Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia,

²JSC «Mosgirotrans», Moscow, Russia

³Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

⁴Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Corresponding author: Evgeny N. Kurbatskiy, e-mail: dynamic.mii@gmail.com

Abstract. The paper is dedicated to modelling the behaviour of an infinitely long beam resting on a solid elastic foundation under the concentrated moving load effect. The modelling is carried out in the context of determining the high-speed vehicle stock impact on the track structure. When developing the method of problem solving, the known elasticity theory factors, wave-propagation theory, complex variable theory, as well as integral transformations of generalised functions were used. The mobile concentrated force is represented by the Dirac delta function. The Fourier's integral transformation is used to solve the equation of motion and determine the beam defect. Contour integration using Cauchy residue theorem is applied to calculate the defect values in the original space. The general dependence form the beam defect on the load velocity is determined. It is shown that the defect values in the beam increase with moving load increasing speed. It is shown how the moving load velocity affects the character of the beam

defect time dependence. Solutions are given for Euler-Bernoulli, Rayleigh and Timoshenko models of beams on an elastic base. The considered mathematical models behaviour is compared. It is shown that the character of beam interaction with the moving load, the defect values, as well as the reaching critical velocities character do not differ significantly for the considered beam models. The character of reaching the maximum defect in the application area of the mobile load is analysed. It is shown that the maximum defect values of beams on an elastic base occur after the moving load. The presented methodology can be used to evaluate the impact of rolling stock on the track structure, including the design of high-speed lines.

Keywords: dynamics of structures; moving load; beam on an elastic foundation; Euler-Bernoulli beam; Rayleigh beam; Timoshenko beam; generalized functions; Fourier transform; residue theory

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons "Attribution" («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons "Attribution" 4.0 Global License



Введение

Introduction

Задача моделирования динамических воздействий подвижной нагрузки на изгибаемые элементы находит широкое применение в области проектирования транспортных объектов. Корректное описание поведения элементов конструкций при действии такой нагрузки является необходимым условием для достижения необходимого уровня надёжности и безопасности. Данный вопрос становится все актуальнее в связи с возрастанием скоростей движения, особенно в области железнодорожного транспорта [1–4].

Развитие численных методов, в частности, появление и широкое распространение метода конечных элементов позволило достаточно подробно моделировать различные конструктивные системы под влиянием различных внешних воздействий. К примеру, в работе [5] МКЭ применяется для анализа влияния различных транспортных средств и различных типов неровностей покрытия ездового полотна на динамику мостовых сооружений. В [6] исследовано влияние различных дефектов рельсового пути на частоты собственных колебаний конструкций. Комбинация методов конечных и граничных элементов, представленная в [7], применяется для анализа трёхмерной модели железнодорожного пути. При этом рассматривается влияние таких параметров, как жёсткость балластной призмы, неподрессоренная масса подвижного состава, качество пути и жесткость основания.

Наличие такого гибкого и хорошо формализованного вычислительного аппарата, тем не менее, не отменяет необходимости развития аналитических методов исследования поведения конструкций под нагрузкой. В первую очередь, аналитический подход при решении возникающих в инженерной практике задач позволяет расширить понимание физических основ явлений и процессов, имеющих место в конструктивных элементах, тогда как использование численных методов иногда может напротив затруднить это понимание. Кроме того, наличие непротиворечивой и обоснованной теории, возможность выразить искомые функции в аналитическом виде часто бывают необходимы при решении наукоёмких задач, к примеру задач оптимизации.

Методика, основанная на применении таких инструментов, как интегральное преобразование Фурье, контурное интегрирование с использованием теории вычетов [8], дельта-функция Дирака [9], рассматривалась ранее в работе [10] на примере анализа балки Эйлера-Бернулли. В рамках работы были исследованы различные варианты математических моделей верхнего строения пути.

В настоящей работе производится сравнение результатов, полученных для трех моделей балок — балки Эйлера-Бернулли, балки Рэлея и балки Тимошенко. Рассматриваемая в статье задача о колебаниях бесконечно длинной балки на упругом основании при движении по ней сосредоточенной силы отражает прикладную задачу моделирования воздействия колёсной пары на верхнее строение пути¹ [11–12]. Предлагаемая методика позволяет решать широкий класс подобных задач и может быть эффективно использована в инженерной практике.

1. Постановка задачи

1. Research objective

Рассмотрим бесконечно длинную балку, лежащую на сплошном упругом основании, под действием движущейся с постоянной скоростью сосредоточенной силы P (рис. 1).

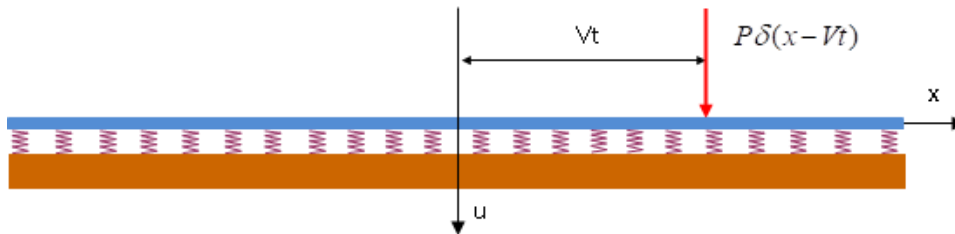


Рисунок 1. Расчётная схема рассматриваемой балки (расчетная схема составлена авторами)

Figure 1. Design diagram of the considering beam (design diagram compiled by the authors)

В настоящей статье рассматриваются три модели изгибаемой балки: Тимошенко² (1) Рэлея³ (2) и Эйлера-Бернулли⁴ (3):

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho EI}{\gamma G} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho I}{\gamma G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = q(x, t), \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = q(x, t), \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = q(x, t). \quad (3)$$

¹ Шаповалов, С.Н. Действие подвижной нагрузки на балку, лежащую на упругом основании с переменными параметрами: дис. канд. тех. наук: 05.23.17 / Сергей Николаевич Шаповалов. — М., 2004. — 133 с.

² Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. — Учеб. для строит. спец. вузов. М.: Высш. шк., 1990, 400 с.

³ Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика. В 2 кн. Кн. 2 Динамика и устойчивость упругих систем: учебное пособие для вузов. / Под ред. А.В. Александрова. М.: Высш. шк., 2008, 384 с.: ил.

⁴ Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов: Учебник для вузов. 2-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2002, 672 с.

Здесь E — модуль упругости балки; G — модуль сдвига; I — момент инерции поперечного сечения балки; ρ — плотность материала балки; A — площадь поперечного сечения балки; k — коэффициент постели упругого основания; c — коэффициент демпфирования основания; γ — коэффициент влияния формы; $q(x, t)$ — интенсивность воздействия на балку.

В качестве подвижной нагрузки рассмотрим сосредоточенную силу P , движущуюся по балке с постоянной скоростью: $q(x, t) = P\delta(x - Vt)$. Такая нагрузка может приближённо описывать воздействие колёсной пары на рельсы. $\delta(x - Vt)$ — дельта функция Дирака [9]. В понятие обобщённой функции мы вкладываем следующий смысл: невозможно определить значение физической величины (в нашем случае сосредоточенной силы) в точке, а можно только определить её средние значения в некоторой малой окрестности этой точки, а потом вычислить предел последовательности этих средних значений и использовать его как искомое значение физической величины [13].

Граничные условия для бесконечно длинной балки имеют следующий вид:

$$\text{при } x - Vt \rightarrow \infty, x - Vt \rightarrow -\infty: u(x, t) = u'(x, t) = u''(x, t) = u'''(x, t) = 0.$$

Задача решается в перемещениях.

2. Моделирование колебаний балки Тимошенко

2. Vibrations simulation of the Timoshenko beam

В качестве основной расчетной модели рассмотрим дифференциальное уравнение балки Тимошенко (1) на сплошном упругом основании при воздействии постоянной силы, движущейся с постоянной скоростью.

Для решения дифференциального уравнения (1) применим интегральное преобразование Фурье, используя следующие основные соотношения [14]:

$$\tilde{U}(v, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp(ivx) \exp(i\omega t) dx dt, \quad (4)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(v, \omega) \exp(-ivx) \exp(-i\omega t) dv d\omega. \quad (5)$$

Здесь v, ω — переменные преобразования Фурье в комплексной плоскости; $\tilde{U}(v, \omega)$ — изображение Фурье функции $u(x, t)$.

После преобразований уравнение (1) примет вид:

$$\left(EIv^4 - \rho Iv^2 \omega^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^2 \omega^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} \omega^4 - \rho A \omega^2 - i\omega c + k \right) \tilde{U}(v, \omega) = 2\pi P \delta(\omega + vV). \quad (6)$$

Получим Фурье-образ функции прогиба:

$$\tilde{U}(v, \omega) = \frac{2\pi P \delta(\omega + vV)}{\left(EIv^4 - \rho I v^2 \omega^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^2 \omega^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} \omega^4 - \rho A \omega^2 - i\omega c + k \right)}. \quad (7)$$

Так как, согласно свойствам, дельта функции [13], $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \delta(\omega - \omega_0) d\omega = f(\omega_0)$, переход в пространство оригиналов осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi P \delta(\omega + vV) e^{-ivx} e^{-i\omega t}}{\left(EIv^4 - \rho I v^2 \omega^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^2 \omega^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} \omega^4 - \rho A \omega^2 - i\omega c + k \right)} dv d\omega = \\ &= \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(vx + \omega t)}}{\left(EIv^4 - \rho I v^2 \omega^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^2 \omega^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} \omega^4 - \rho A \omega^2 - i\omega c + k \right)} \delta(\omega + vV) dv d\omega = \\ &= \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(vx - vVt)}}{\left(EIv^4 - \rho I v^4 V^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^4 V^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} v^4 V^4 - \rho A v^2 V^2 + i v V c + k \right)} dv. \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения зависимости прогиба от пространственной координаты можно воспользоваться теорией вычетов [15], для чего необходимо знать корни знаменателя подынтегрального выражения (8).

Знаменатель подынтегрального выражения представляет собой полином четвёртого порядка и, следовательно, имеет четыре корня. Два корня расположены в верхней полуплоскости и два в нижней (рис. 2).

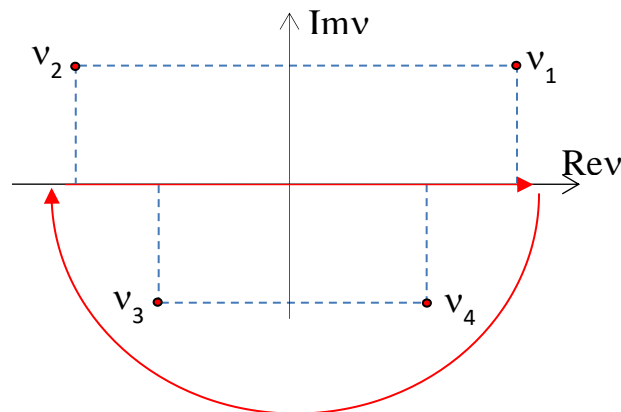


Рисунок 2. Схема расположения корней знаменателя подынтегрального выражения (8) на комплексной плоскости (схема составлена авторами)

Figure 2. Location diagram of the integration element denominator roots (8) on the complex plane (diagram compiled by the authors)

Для определения функции прогиба перед движущейся силой при $x - Vt > 0$ необходимо вычислить интеграл (8) по контуру, лежащему в нижней полуплоскости (рис. 2). В выражение для этого интеграла вносят вклад только полюсы, лежащие в нижней полуплоскости. Поэтому функцию прогиба можно представить в виде:

$$u(x, t) = \frac{P2\pi i}{2\pi} \left[\sum_{v_{3,4}} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(EIv^4 - \rho Iv^4 V^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^4 V^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} v^4 V^4 - \rho Av^2 V^2 + ivVc + k)} \right) \right]. \quad (9)$$

Аналогично для прогибов за движущейся силой при $x - Vt < 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(EIv^4 - \rho Iv^4 V^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^4 V^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} v^4 V^4 - \rho Av^2 V^2 + ivVc + k)} \right) \right]. \quad (10)$$

Вычет функции, представляющей собой частное от деления двух функций $f(v) = \frac{g(v)}{\psi(v)}$ можно представить в виде: $\operatorname{Res} f(v) = \frac{g(v)}{\psi'(v)}$ [15].

Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(EIv^4 - \rho Iv^4 V^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^4 V^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} v^4 V^4 - \rho Av^2 V^2 + ivVc + k)} \right) &= \\ &= \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 4\frac{\rho EI}{\gamma G} v^3 V^2 + 4\frac{\rho I}{\gamma G} v^3 V^4 - 2\rho AvV^2 + iVc)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполнив расчет вычетов, получим функцию прогиба перед движущейся силой при $x - Vt > 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{3,4}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 4\frac{\rho EI}{\gamma G} v^3 V^2 + 4\frac{\rho I}{\gamma G} v^3 V^4 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right], \quad (12)$$

и функцию прогиба за движущейся силой при $x - Vt < 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 4\frac{\rho EI}{\gamma G} v^3 V^2 + 4\frac{\rho I}{\gamma G} v^3 V^4 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (13)$$

3. Моделирование колебаний Балки Рэлея

Rayleigh Beam vibrations simulation

Модель балки Рэлея можно рассматривать как частный случай модели балки Тимошенко, полагая параметры сдвига равными нулю:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = P \delta(x - Vt). \quad (14)$$

Рассмотрим ключевые моменты решения задачи для этой модели. Фурье-образ функции прогиба:

$$\tilde{U}(v, \omega) = \frac{2\pi P \delta(\omega + vV)}{(EIv^4 - \rho Iv^2 \omega^2 - \rho A \omega^2 - i\omega c + k)}. \quad (15)$$

Функция прогиба при переходе в пространство оригиналов через обратное преобразование Фурье:

$$u(x, t) = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(EIv^4 - \rho Iv^2 \omega^2 - \rho A \omega^2 + ivVc + k)} dv. \quad (16)$$

Функция прогиба перед движущейся силой при $x - Vt > 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{3,4}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (17)$$

Функция прогиба за движущейся силой при $x - Vt < 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (18)$$

4. Моделирование колебаний балки Эйлера-Бернулли

4. Euler-Bernoulli beam vibrations simulation

Модель балки Эйлера-Бернулли можно рассматривать как частный случай модели балки Тимошенко, полагая параметры сдвига и кручения равными нулю:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = P\delta(x - Vt). \quad (19)$$

Рассмотрим ключевые моменты решения задачи для этой модели. Фурье-образ функции прогиба:

$$\tilde{U}(v, \omega) = \frac{2\pi P\delta(\omega + vV)}{(EIv^4 - \rho A\omega^2 - i\omega c + k)}. \quad (20)$$

Функция прогиба при переходе в пространство оригиналов через обратное преобразование Фурье:

$$u(x, t) = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(EIv^4 - \rho Av^2 V^2 + iVc + k)} dv. \quad (21)$$

Функция прогиба перед движущейся силой при $x - Vt > 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{3,4}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (22)$$

Функция прогиба за движущейся силой при $x - Vt < 0$:

$$u(x, t) = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{e^{-i(vx-vVt)}}{(4EIv^3 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (23)$$

5. Численные примеры

5. Numerical examples

В качестве численного примера рассмотрим балку со следующими характеристиками: погонная масса $m = 320$ кг/м, площадь поперечного сечения $A = 83 \cdot 10^{-4}$ м², момент инерции $I = 354 \cdot 10^{-7}$ м⁴, коэффициент влияния формы $\gamma = 3,6$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 7,7 \cdot 10^{10}$ Па; коэффициент постели $k = 7,5$ МПа (грунт средней плотности).

Для балки Тимошенко найдем корни знаменателя выражения функции прогиба:

$$EIv^4 - \rho I v^4 V^2 - \frac{\rho EI}{\gamma G} v^4 V^2 + \frac{\rho I}{\gamma G} v^4 V^4 - \rho A v^2 V^2 + i v V c + k = 0. \quad (24)$$

Для нахождения корней использовался встроенный решатель MATLAB.

Полученные для разных скоростей движения значения приведены в таблице 1.

Таблица 1 / Table 1

Корни выражения (23) при разных скоростях движения подвижной нагрузки

Expression roots (23) at different moving load speeds

Скорость V, м/с Speed V, m/s	Корни многочлена четвёртой степени Quartic polynomial roots			
	v_1	v_2	v_3	v_4
10	$0.7178 + 0.7166i$	$-0.7178 + 0.7166i$	$-0.7185 - 0.7166i$	$0.7185 - 0.7166i$
50	$0.7353 + 0.6975i$	$-0.7353 + 0.6975i$	$-0.7386 - 0.6975i$	$0.7386 - 0.6975i$
100	$0.7895 + 0.6341i$	$-0.7895 + 0.6341i$	$-0.7964 - 0.6341i$	$0.7964 - 0.6341i$

Составлена авторами / Compiled by the authors

Подставляя полученные корни в выражения (12) и (13) при условии, что $x = 0$, построим график зависимости прогибов балки в начале координат от времени при разных скоростях (рис. 3).

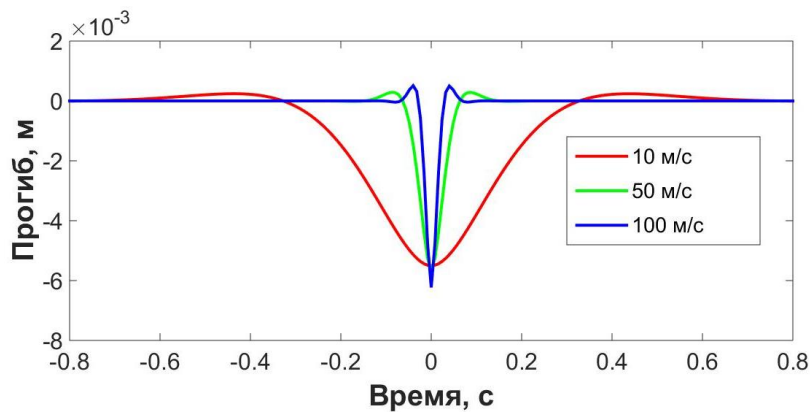


Рисунок 3. Прогибы балки в начале координат ($x = 0$) при разных скоростях движения (графики получены авторами)

Figure 3. Beam defects at the origin ($x = 0$) at different speeds (graphs obtained by the authors)

Аналогично, приняв $t = 0$, найдем прогибы балки в момент прохождения силой начала координат при разных скоростях (рис. 4).

Для моделей балок Рэлея и Эйлера-Бернулли графики идентичны. Имеются только малые расхождения в тысячную долю миллиметра, заметные при оценке прогибов в точке приложения силы.

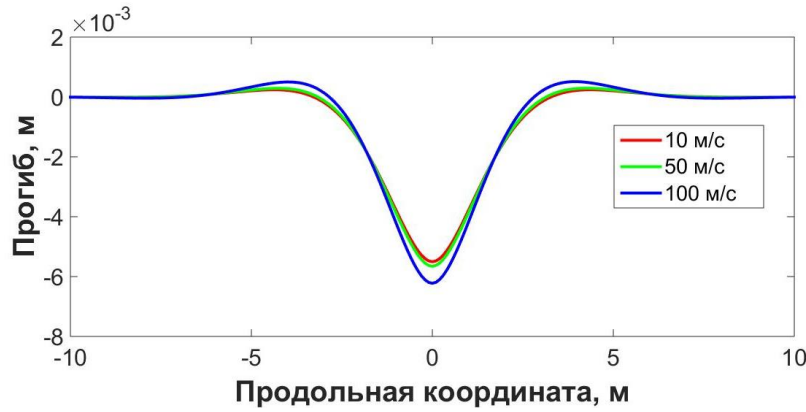


Рисунок 4. Прогибы балки в начальный момент времени ($t = 0$), когда нагрузка проходит нулевую точку, при разных скоростях движения (графики получены авторами)

Figure 4. Beam defects at the initial moment of time ($t = 0$), when the load passes the zero point, at different speeds (graphs obtained by the authors)

Для их определения подставим значения $t = 0$ и $x = 0$ в выражения (13, 18, 23). Для балки Тимошенко получим:

$$u = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{l}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 4\frac{\rho EI}{\gamma G} v^3 V^2 + 4\frac{\rho I}{\gamma G} v^3 V^4 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (25)$$

Для балки Рэлея:

$$u = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{l}{(4EIv^3 - 4\rho Iv^3 V^2 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (26)$$

Для балки Эйлера-Бернулли:

$$u = Pi \left[\sum_{v_{1,2}} \frac{l}{(4EIv^3 - 2\rho AvV^2 + iVc)} \right]. \quad (27)$$

Таблица 2 / Table 2

Прогибы балок в точке приложения силы
Beam defects at the force application point

Скорость V, м/с Speed V, m/s	Прогиб в точке приложения силы, м Defect at the force application point, m		
	Модель Эйлера-Бернулли Euler-Bernoulli model	Модель Рэлея Rayleigh model	Модель Тимошенко Timoshenko model
10	0.005506	0.005506	0.005506
50	0.005657	0.005658	0.005657
100	0.006225	0.006229	0.006225

Составлена авторами / Compiled by the authors

Как видно из таблицы, на рассмотренных скоростях разница в прогибах для разных моделей балок незначительна, но она возрастает с увеличением скорости. Для более полного анализа найдем значения максимальных прогибов и сравним их со значениями прогибов в точке приложения силы для скоростей, больше рассмотренных ранее.

Отмечено [15], что максимальные значения прогибов балок на упруго-вязком основании возникают за движущейся нагрузкой. На рассмотренных ранее скоростях отставание координаты максимального прогиба от точки приложения силы было несущественным, но с увеличением скорости, данное отставание, а следовательно, и разница между прогибами в точке приложения силы и максимальными прогибами возрастает.

Для нахождения максимальных прогибов, вычислим значения функций прогиба балок за движущейся силой (13, 18, 23) по скорости (в диапазоне от 100 до 300 м/с) и по времени (в диапазоне от $t = 0$ до $t = 0,01$), находя для каждой скорости соответствующее значение максимального прогиба. Сопоставим графики прогиба в точке приложения силы и максимального прогиба для балки Тимошенко (рис. 5).

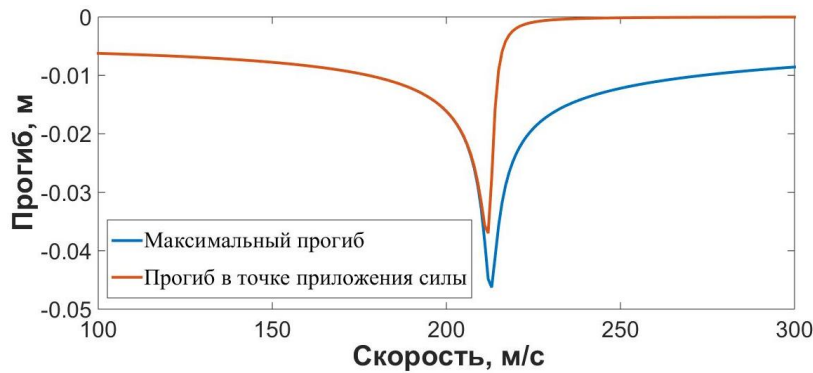


Рисунок 5. Графики максимального прогиба и прогиба в точке приложения силы для балки Тимошенко (графики получены авторами)

Figure 5. Graphs of maximum defect and defect at the force application point for the Timoshenko beam (graphs obtained by the authors)

Из графиков видно, что значение критической скорости лежит в диапазоне от 210 до 220 м/с.

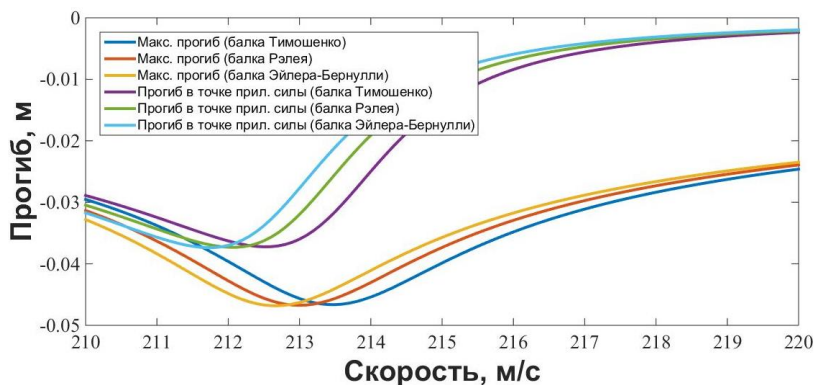


Рисунок 6. Графики максимального прогиба и прогиба в точке приложения силы для трех моделей балок (графики получены авторами)

Figure 6. Graphs of maximum defect and defect at the force application point for three beam models (graphs obtained by the authors)

Также, можно заметить, что после достижения критической скорости смещение максимального прогиба относительно точки приложения силы существенно возрастает, а значение прогиба в точке приложения силы стремится к нулю.

Для сравнения результатов для разных моделей балок построим графики максимальных прогибов для трех моделей балок в диапазоне скоростей от 210 до 220 м/с (рис. 6).

Как видно из графиков, при скоростях, близких к критической и больших, максимальный прогиб, возникающий за движущейся силой, существенно больше прогиба в месте приложения силы. При этом сами величины максимальных прогибов для разных моделей балок отличаются пренебрежимо мало, в то время как критические скорости отличаются в пределах 0,5 %.

Заключение

Conclusion

Проведенный сравнительный анализ показал, что все три рассмотренные модели изгибаемых балок дают очень близкие результаты при моделировании прогибов при действии подвижной нагрузки. Таким образом применение модели Эйлера-Бернулли при расчёте конструкций с использованием предлагаемой методики позволяет добиться адекватной точности результатов, в тоже время, не перегружая математическую модель. Приведенные результаты показывают, что величина прогиба существенно зависит от скорости движения подвижной нагрузки. Описанная методика может быть эффективно использована при проектировании и оптимизации конструкции пути высокоскоростных железнодорожных линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванченко, И.И.** Динамика транспортных сооружений. Высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки / И.И. Иванченко. — М.: Наука, 2011. — 575 с.
2. **Auersch, L.** The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway tracks / L. Auersch. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.013> // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — Т 310. — № 3. — С. 587–607. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022460X07008012>. (дата обращения: 02.06.2023).
3. **Celebi, E.** Investigation of ground vibrations induced by moving loads / E. Celebi, G. Schmid. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.05.011> // Engineering Structures. — 2005. — Т 27. — № 14. — С. 1981–1998. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0141029605002324>. (дата обращения: 02.06.2023).

4. **Карасева, А.А.** Анализ мирового опыта развития высокоскоростного железнодорожного транспорта / А.А. Карасева, М.А. Васильева // Молодой ученый. — 2016. — № 6. — С. 114–117. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25665355>. — EDN VPQNAJ. (дата обращения: 02.06.2023).
5. **Olsson, M.** Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads / M. Olsson. — DOI [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90440-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90440-7) // Journal of Sound and Vibration. — 1985. — Т 99. — № 1. — С. 1–12. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0022460X85904407>. (дата обращения: 02.06.2023).
6. **Nielsen, J.C.O.** Vertical Dynamic Interaction Between Train and Track Influence of Wheel and Track Imperfections / J.C.O. Nielsen, A. Igeland. — DOI <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0566> // Journal of Sound and Vibration. — 1995. — Т 187. — № 5. — С. 825–839. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022460X85705664>. (дата обращения: 02.06.2023).
7. **Auersch, L.** Dynamic Axle Loads on Tracks with and Without Ballast Mats: Numerical Results of Three-Dimensional Vehicle-Track-Soil Models / L. Auersch. — DOI <https://doi.org/10.1243/09544097F00105> // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. — 2006. — Т 220. — № 2. — С. 169–183. — URL: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1243/09544097F00105>. (дата обращения: 02.06.2023).
8. **Араманович, И.Г.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. — М.: Наука, 1965. — 391 с.
9. **Dirac, P.A.M.** The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics / P.A.M. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1927. — Т 113. — № 765. — С. 621–641. — URL: <https://www.jstor.org/stable/94646?origin=JSTOR-pdf>. (дата обращения: 17.06.2023).
10. **Зернов, И.И.** Воздействие высокоскоростного подвижного состава на верхнее строение пути и конструкции обделок тоннелей из опускных секций / И.И. Зернов, Е.А. Пестрякова, С. С. Харитонов // Строительство и реконструкция. — 2018. — № 2. — С. 18–26. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35213404>. — EDN XSLYRN. (дата обращения: 17.06.2023).
11. **Jezequel, L.** Response of Periodic Systems to a Moving Load / L. Jezequel. — DOI <https://doi.org/10.1115/1.3157683> // J. Appl. Mech. — 1981. — Т 48. — № 3. — С. 613–618. — URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/48/3/613/389747/Response-of-Periodic-Systems-to-a-Moving-Load?redirectedFrom=fulltext>. (дата обращения: 17.06.2023).
12. **Frýba, L.** Vibration of solids and structures under moving loads / L. Frýba. — Гронинген: Noordhoff International, 1977.
14. **Владимиров, В.С.** Обобщённые функции в математической физике. Изд. 2-е, исправленное и дополненное / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
15. **Брычков, Ю.А.** Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. — М.: Наука, 1977. — 287 с.
16. **Sun, L.** A closed-form solution of beam on viscoelastic subgrade subjected to moving loads / L. Sun. — DOI [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00162-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00162-6) // Computers & Structures. — 2002. — Т 80. — № 1. — С. 1–8. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045794901001626>. (дата обращения: 17.06.2023).

Сведения об авторах:

Курбацкий Евгений Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Мостов и тоннелей», ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия, e-mail: dynamic.miit@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8593-0340>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=361758

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57199402939>

Зернов Иван Игоревич — инженер-конструктор, АО «Мосгипротранс», Москва, Россия, e-mail: zernovivig@gmail.com

Бадина Елена Сергеевна — кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия, ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук», Москва, Россия, e-mail: shepitko-es@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=890931

Статья получена: 10.07.2023. Принята к публикации: 05.10.2023. Опубликовано онлайн: 19.10.2023.

REFERENCES

1. Ivanchenko I.I. Dinamika transportnykh sooruzheniy. Vysokoskorostnyye podvizhnyye, seymicheskiye i udarnyye nagruzki [Dynamics of transport structures. High-speed moving, seismic and shock loads]. Moscow: Nauka; 2011. (In Russ.).
2. Auersch L. The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway tracks. *Journal of Sound and Vibration*. 2008; 310(3): 587–607. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.013>.
3. Celebi E., Schmid G. Investigation of ground vibrations induced by moving loads. *Engineering Structures*. 2005; 27(14): 1981–1998. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.05.011>.
4. Karaseva A.A., Vasil'yeva M.A. [Analysis of global experience in the development of high-speed rail transport]. *Young scientist*. 2016; (6): 114–117. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25665355> (accessed 2nd June 2023). (In Russ.).
5. Olsson M. Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. 1985; 99(1): 1–12. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90440-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90440-7).
6. Nielsen J.C.O., Igeland A. Vertical Dynamic Interaction Between Train and Track Influence of Wheel and Track Imperfections. *Journal of Sound and Vibration*. 1995; 187(5): 825–839. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0566>.
7. Auersch L. Dynamic Axle Loads on Tracks with and Without Ballast Mats: Numerical Results of Three-Dimensional Vehicle-Track-Soil Models. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. 2006; 220(2): 169–183. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1243/09544097F00105>.
8. Aramanovich I.G., Lunts G.L., El'sgol'ts L.E. Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoye ischisleniye. Teoriya ustoychivosti [Functions of a complex variable. Operational calculus. Stability theory]. Moscow: Nauka; 1965. (In Russ.).
9. Dirac P.A.M. The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 1927; 113(765): 621–641. Available at: <https://www.jstor.org/stable/94646?origin=JSTOR-pdf> (accessed 17th June 2023). (In Eng.).
10. Zernov I.I., Pestryakova E.A., Kharitonov S.S. The Impact of High-Speed Rolling Stock on The Superstructure and The Design of Immersed Tunnels. *Building and Reconstruction*. 2018; (2): 18–26. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35213404> (accessed 17th June 2023). (In Russ., abstract in Eng.).
11. Jezequel L. Response of Periodic Systems to a Moving Load. *J. Appl. Mech*. 1981; 48(3): 613–618. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3157683>.
12. Frýba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Groningen: Noordhoff International; 1977. (In Eng.).
13. Vladimirov V.S. Obobshchënnyye funktsii v matematicheskoy fizike. Izd. 2-e, ispravlennoye i dopolnennoye [Generalized functions in mathematical physics. Ed. 2nd, corrected and supplemented]. Moscow: Nauka; 1979. (In Russ.).

15. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. Integral'nyye preobrazovaniya obobshchennykh funktsiy [Integral transformations of generalized functions]. Moscow: Nauka; 1977. (In Russ.).
 16. Sun L. A closed-form solution of beam on viscoelastic subgrade subjected to moving loads. *Computers & Structures*. 2002; 80(1): 1–8. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00162-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00162-6).
-

Information about the authors:

Evgeny N. Kurbatskiy — Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia,
e-mail: dynamic.miiit@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8593-0340>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=361758

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57199402939>

Ivan I. Zernov — JSC «Mosgioprotrans», Moscow, Russia, e-mail: zernovivig@gmail.com

Elena S. Badina — Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, e-mail: shepitko-es@mail.ru

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=890931

Submitted: 10th July 2023. Revised: 5th October 2023. Published online: 19th October 2023.