Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2020, №3, Том 7 / 2020, N 3, Vol. 7 <https://t-s.today/issue-3-2020.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/05SATS320.pdf>

DOI: 10.15862/05SATS320 (<http://dx.doi.org/10.15862/05SATS320>)

Моделирование температурного поля цилиндрического тела из полимерного материала в условиях переходного термического процесса

Петрова Л.С., Гаврилова Т.И.

ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Омск, Россия

Автор, ответственный за переписку: Петрова Лилия Сергеевна, e-mail: petrov.306@mail.ru

Аннотация. Возрастание требований к прочностным, релаксационным, теплофизическим, электрическим и др. характеристикам элементов конструкций актуализирует применение полимерных композиционных материалов для изготовления неметаллических деталей и узлов, обеспечивающее улучшение эксплуатационных показателей. Отражена потребность учитывать релаксационные явления при прогнозировании развития тепловых полей тел из полимерных материалов, для которых время тепловой релаксации и время термического демпфирования соразмерно продолжительности определенных периодов переходного термического процесса.

В статье рассматривается математическая модель трехпериодного термического процесса в цилиндрическом теле из низкотеплопроводного материала с использованием гиперболического уравнения теплопроводности, отражающего явление релаксации теплового потока и термическое демпфирование.

Представлено численное решение задачи нестационарной теплопроводности в круглом диске для уравнения с двухфазным запаздыванием, которое основывается на реализации метода сеток с использованием трехслойной неявной разностной схемы и применением методики конечных разностей.

Выведены расчетные формулы для прогонных коэффициентов и значений температуры на внешних границах с использованием аппроксимации граничных условий для промежуточного и верхнего временных слоев с учетом многопериодности процесса. Описана реализация модифицированного метода прогонки при решении нестационарной задачи теплопроводности в цилиндрическом теле с учетом конечной скорости распространения тепла и термического демпфирования.

Получены результаты расчета температурного поля для тела цилиндрической формы на примере полиметилметакрилата при внезапном нагревании на основе модели с двухфазным запаздыванием. Представленные результаты способствуют повышению точности прогнозирования температурных полей в полимерных композиционных материалах при исследовании переходных термических процессов.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы; математическая модель; расчёт температурного поля; гиперболическое уравнение теплопроводности; термическое демпфирование; релаксация теплового потока; численные методы

Cylindrical body temperature field simulation which made in the transitional thermal process conditions out of polymer material

Liliya S. Petrova, Tatyana I. Gavrilova

Omsk State Transport University, Omsk, Russia

Corresponding author: Liliya S. Petrova, e-mail: petrov.306@mail.ru

Abstract. The advancing requirements for strength, relaxation, thermophysical, electrical, and other structural elements characteristics actualizes the polymer composite material use for the soft part and node point manufacture, which improves performance index. This paper reported the need to take into account relaxation phenomena in predicting the body's thermal field development that is made of polymeric materials, and the thermal relaxation time and the thermal damping time proportional to the duration of transient thermal process certain periods.

In this article three-period thermal process in a cylindrical body mathematical model is presented. cylindrical body made of a low-heat-conducting material by using a heat conduction hyperbolic equation that is reflecting the heat flow relaxation and thermal damping phenomenon.

A numerical solution to the problem of unsteady heat conduction in a circular disk for a two-phase delay equation is presented, which is based on the grid method implementation by using a three-layer implicit difference scheme and

the finite difference method use. Calculation formulas for the run-through coefficients as well as the temperature values at the outer boundaries are concluded using the boundary conditions approximation for the intermediate and upper time layers, taking into account the multi-period of the process. The implementation of the modified run-through method when solving the non-stationary heat conduction problem in a cylindrical body, taking into account the finite heat propagation speed and thermal damping is described.

The calculation results for the cylindrical body temperature field are obtained by using the polymethyl methacrylate example upon sudden heating based on a model with a two-phase delay. The results presented in this paper aid in an increase in predicting temperature field accuracy in polymer composite materials in the transient thermal processes study.

Keywords: polymer composite materials; mathematical model; temperature field calculation; thermal conductivity hyperbolic equation; thermal damping; heat flow relaxation; numerical methods

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons “Attribution” («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons “Attribution” 4.0 Global License

Введение

Introduction

Современная тенденция возрастания требований к упруго-прочностным характеристикам, эксплуатационной стабильности, технологичности при изготовлении деталей и элементов конструкций способствует интенсификации разработок и исследований в области полимерных композиционных материалов (ПКМ), выделенных среди наиболее актуальных в рамках концепции «Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» [1]. При этом одним из приоритетных направлений рассматривается разработка термостойких полимерных композиционных материалов.

Специальные целевые программы посвящены исследованиям и разработкам по внедрению композиционных материалов в транспортной отрасли, в частности на железнодорожном транспорте. Стратегия развития железнодорожного транспорта России помимо основного направления внедрения полимерных композиционных материалов применительно к подвижному составу (фрикционные планки, изолирующие втулки, элементы настила пола, лобовые стекла, сепараторы подшипников, тормозные колодки, накладки, элементы вентиляторов и т. п.) и верхнего строения пути, имеет направленность на проведение прогнозно-аналитических исследований по проектированию энергопоглощающих конструкций из ПКМ. Среди зарубежных стран внедрение разработок по применению композиционных материалов в подвижном составе железнодорожного транспорта наиболее широко ведется в Европейских странах, Японии, Америке и др. [2].

Потребность транспортной отрасли в замене металлических элементов конструкций композиционными материалами, обладающими определенными преимуществами (высокая коррозионная устойчивость, простота в изготовлении, низкая стоимость сырья и т. д.), определяет основные направления исследований по применению неметаллических деталей и узлов. При этом рассматривается направленность фундаментальных исследований не только на создание новых материалов, но и на усовершенствование технологий по производству известных материалов с улучшенными функциональными и эксплуатационными свойствами.

Особое внимание уделяется оценке пригодности полимерных материалов и покрытий для использования в определенных коррозионных средах с исследованием коррозионной стойкости элементов конструкций не только в зависимости от материала, из которого их изготавливают, но и от вида воздействующей среды. Так, например, отмечается, что использование полимерных композиционных материалов в отопительно-

вентиляционных системах позволяет избежать коррозии, увеличивая срок эксплуатации конструкций. В исследовании А.Е. Юдахина представлена оценка эффективности использования полиметилметакрилата в качестве материала насадки регенеративного воздухоподогревателя, входящего в состав отопительно-вентиляционной системы. В работе показана необходимость учета релаксационных явлений при описании быстропотекающего переходного термического процесса для низкотеплопроводных тел, в силу соразмерности времени тепловой релаксации и термического демпфирования с продолжительностью отдельных периодов термического процесса¹.

Анализ проблемы

Problem analysis

Использование нетипичных материалов со сложной структурой и высокая скорость нагрева приводит к моделированию на основе уравнений в частных производных с эффектом запаздывания. Рассматривая основные подходы при исследовании методов решения уравнений с эффектом запаздывания, необходимо отметить работу В.Г. Пименова, А.Б. Ложникова [3] посвященную численному решению уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной с использованием явной разностной схемы, а также исследование Н.А. Парфентьева, Н.А. Парфентьевой [4] посвященное моделированию на основе классического уравнения теплопроводности параболического типа с введением эффективной теплоемкости. Проблеме описания тепловых процессов под действием интенсивных потоков энергии с учетом влияния процессов релаксации для твердого тела посвящено исследование М.М. Якункина [5]. В работе представлены поправки, предоставляющие возможность описать влияние инерции среды на тепловые процессы.

Современными исследователями отмечается в качестве недостатка математического моделирования при описании температурных полей на основе гипотезы Фурье предположение о бесконечно большой скорости переноса теплоты, что приемлемо для низких скоростей изменения теплового потока и градиента температуры, а в случае резких колебаний данных величин отражается искаженное представление о температурном поле. В работах исследователей отмечается необходимость учета конечной скорости распространения тепла и тепловой инерции с преимущественным использованием неклассических моделей теплопроводности (гиперболическая модель и модель с двухфазным

¹ Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстропотекающего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. 141 с.

запаздыванием) при описании термических процессов в материалах со сложной структурой с внезапным нагревом или при использовании технологий с достижением сверхвысоких и сверхнизких температур.

Исследователями Л.А. Фильштинским, Т.А. Киричек [6], А.Е. Юдахиным¹, Е. Majchrzak, В. Mochnecki [7] и др., рассматривается модель с двухфазным запаздыванием Максвелла-Каттанео-Лыкова, с использованием следующей взаимосвязи теплового потока и градиента температуры с учетом тепловой релаксации и термического демпфирования:

$$q(X, \tau + \tau_q) = -\lambda \nabla T(X, \tau + \tau_T), \quad (1)$$

где τ_T и τ_q – постоянные, задающие время термического демпфирования и время тепловой релаксации, T – температура, X – пространственные координаты, λ – коэффициент теплопроводности, q – плотность теплового потока.

Разложение левой и правой частей соотношения (1) в ряд Тейлора в сочетании с уравнением теплового баланса $c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div} q$ позволило исследователям получить в зависимости от включения компонент, содержащих первые и вторые производные по времени, две формы записи уравнения с двухфазным запаздыванием [7, с. 2]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \Delta \left(T + \tau_T \frac{\partial T}{\partial \tau} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^3 T}{\partial \tau^3} = a \Delta \left(T + \tau_T \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\tau_T^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right), \quad (3)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности,

$\Delta T = \nabla^2 T = \operatorname{div}(\operatorname{grad} T)$ – оператор Лапласа.

В исследовании Е. Majchrzak, В. Mochnecki [7] в зависимости от порядка разложения в ряд Тейлора для левой и правой частей закона Фурье представлены две модели двухфазного запаздывания (первого и второго порядка) и на основании приведенных результатов численных расчётов показаны различия в полученных решениях при моделировании высокоскоростного теплового процесса в тонкой металлической пленке при воздействии лазерного импульса на поверхность.

Рассматривая аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности для уравнения с двухфазным запаздыванием,

необходимо отметить сложность процесса получения решения в виде функции от временной и пространственных переменных, в результате производятся значительные упрощения исходной модели, которые отражаются на адекватности математической модели. Достаточно часто полученное с использованием классических методов решение неудобно для практической реализации. Наиболее предпочтительными для теоретических исследований считаются операционные методы, среди которых при изучении переходных термических процессов для тел простых форм выделяют метод конечных интегральных преобразований Фурье-Ханкеля. Несомненным достоинством данных методов является возможность изучения взаимосвязи различных параметров процесса.

Ограниченность применения аналитических методов при решении уравнений гиперболического типа с эффектом запаздывания, представленных в работах [8–12], определяет направление реализации численных методов решения подобных задач. При этом следует отметить, что тематика применения численных методов при решении задач для уравнения гиперболического типа с эффектом запаздывания продолжает оставаться недостаточно исследованной. В работе [13] рассматривается реализация метода прогонки при решении нелинейной задачи теплопроводности в двухслойном теле с учетом времени релаксации теплового потока. В работах [7; 14] представлено численное решение задачи теплопроводности с реализацией явной и неявной разностных схем для уравнения двухфазного запаздывания с одной пространственной переменной. Исследование В.Г. Пименова и Е.Е. Ташировой [15] посвящено разработке сеточных методов решения уравнений гиперболического типа с эффектом запаздывания общего вида. Необходимо отметить, что нами не выявлены исследования в направлении моделирования процесса теплопереноса для тел цилиндрической формы с учетом конечной скорости распространения тепла и термического демпфирования, основанного на реализации метода сеток с использованием трехслойной неявной разностной схемы и с применением методики конечных разностей.

Методы решения задачи нестационарного конвективного теплообмена в цилиндрическом теле с использованием гиперболического уравнения с двухфазным запаздыванием, отражающего явление релаксации теплового потока и термическое демпфирование

Methods for solving the transient convective heat transfer problem in a cylindrical body by using a hyperbolic equation with a two-phase delay, reflecting the heat flow relaxation phenomenon and thermal damping

Современными исследователями при описании быстропротекающего термического процесса в твердом теле при условии внезапного нагрева, импульсного и кратковременного теплового воздействия на поверхность используются два вида неклассических моделей теплопроводности, основанные на гипотезе Каттанео-Вернотта (учитывает релаксацию теплового потока) и гипотезе Максвелла-Каттанео-Лыкова (учитывает конечную скорость распространения тепла и термическое демпфирование).

Применение операционного метода для решения нестационарной задачи теплообмена на основе уравнения с двухфазным запаздыванием, отражающего явление релаксации теплового потока и тепловой инерции описано в исследовании Ю.А. Кирсанова, А.Ю. Кирсанова и А.Е. Юдахина [16]. В работе Л.А. Фильштинского и Т.А. Киричек [6] предложена методика расчета температурного поля в слое с отверстием на основе модели с двухфазным запаздыванием, включающая решение соответствующей однородной задачи с использованием полной системы метагармонических функций и численного решения системы регулярных интегральных уравнений. Исследователями Е. Majchrzak, В. Mochnecki [7] представлена реализация метода сеток с использованием явной и неявной разностных схем для расчета температурного поля по толщине тонкой металлической пластины при воздействии лазерного импульса с учетом явления термического демпфирования и конечной скорости распространения тепла. Возрастание трудоёмкости выполняемых преобразований с увеличением размерности задач, с усложнением форм исследуемых областей при реализации аналитических методов, способствует разработке численных методов решения задачи нестационарного конвективного теплообмена для уравнения с двухфазным запаздыванием.

Рассматривая тепловой переходный процесс в теле из низкотеплопроводного материала, исследователями отмечается необходимость учета релаксационных явлений при прогнозировании развития тепловых полей тел из полимерных материалов, по причине соразмерности времени тепловой релаксации и термического демпфирования продолжительности отдельных периодов переходного термического процесса. Максимальная скорость нагрева с наиболее интенсивным теплообменом рассматривается на первой стадии. Для второй и третьей стадии процесса характерны идентичные скорости нагрева центра образца и его поверхности, с отличием только в уровне

температуры и, в соответствии с периодом нагревания, теплофизических свойствах тела².

Математическая модель трехпериодного переходного термического процесса в условиях конвективного теплообмена для круглого диска с использованием гиперболического уравнения теплопроводности, отражающего релаксационные явления, имеет вид³:

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c_v \frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial \tau^2} + \rho c_v \frac{\partial T_v(r, z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_v \left(\frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_v(r, z, \tau)}{\partial r} \right) + \\ + \lambda_v \tau_T \left(\frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial z^2 \partial \tau} + \frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial r^2 \partial \tau} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial r \partial \tau} \right) \\ 0 < r < R, 0 < z < L, 0 < \tau \leq \tau_m; \end{aligned} \quad (4)$$

начальные условия:

$$T_v(z, r, 0) = \begin{cases} T_0, & v = 1, \\ T_{v-1}(z, r, \tau_{v-1}), & v > 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_v(r, z, 0)}{\partial \tau} = \begin{cases} 0, & v = 1, \\ \frac{\partial T_{v-1}(r, z, \tau_{v-1})}{\partial \tau}, & v > 1; \end{cases} \quad r \in [0, R], z \in [0, L]; \quad (6)$$

условия на границах:

$$\frac{\partial T_v(r, 0, \tau)}{\partial z} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_v(0, z, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (8)$$

$$-\lambda_v \left(\frac{\partial T_v(r, L, \tau)}{\partial z} + \tau_T \frac{\partial^2 T_v(r, L, \tau)}{\partial z \partial \tau} \right) = \gamma_v \left(T_v(r, L, \tau) - T_f + \tau_q \frac{\partial T_v(r, L, \tau)}{\partial \tau} \right); \quad (9)$$

$$-\lambda_v \left(\frac{\partial T_v(R, z, \tau)}{\partial r} + \tau_T \frac{\partial^2 T_v(R, z, \tau)}{\partial r \partial \tau} \right) = \gamma_v \left(T_v(R, z, \tau) - T_f + \tau_q \frac{\partial T_v(R, z, \tau)}{\partial \tau} \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_m; \quad (10)$$

где $v = \overline{1, 3}$ – номер периода (стадии), $T_v(r, z, \tau)$ – температура на данной стадии в момент времени τ для точки диска с координатами (r, z)

² Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстропротекающего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. с. 85, 103.

³ Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстропротекающего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. с. 60.

относительно центра, T_0 – начальная температура, T_f – температура среды, ρ – плотность материала, c_v – теплоемкости, λ_v – коэффициенты теплопроводности, γ_v – коэффициенты теплоотдачи (стандартное обозначение α для коэффициента теплоотдачи далее используется для обозначения прогоночных коэффициентов).

Реализация метода сеток для решения задачи (4)–(10), предусматривает введение прямоугольной пространственно-временной сетки с координатами $z_i = (i-1)h_z$, $r_j = (j-1)h_r$, $\tau_n = nk$, где h_z , h_r – шаги сетки по пространственным координатам, k – шаг по времени, $i = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, M}$; $n = \overline{0, K}$.

Для дискретизации уравнения (4) на соответствующем временном периоде с применением локально одномерной схемы (расщепление по координатам) для гиперболического уравнения, использовались соответствующие разностные аналоги частных производных первого и второго порядков по временной и пространственным координатам. Разностные аналоги смешанных производных второго и третьего порядков с погрешностью аппроксимации $O(kh_r^2)$ и $O(kh_z^2)$, полученные в соответствии с теорией разностных схем, представимы в виде:

$$\frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial r \partial \tau} \approx \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - T_{v,i,j+1}^n - T_{v,i,j-1}^{n+1} + T_{v,i,j-1}^n}{2h_r k}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial r^2 \partial \tau} \approx \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - T_{v,i,j+1}^n - 2(T_{v,i,j}^{n+1} - T_{v,i,j}^n) + T_{v,i,j-1}^{n+1} - T_{v,i,j-1}^n}{h_r^2 k}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial z^2 \partial \tau} \approx \frac{T_{v,i+1,j}^{n+1} - T_{v,i+1,j}^n - 2(T_{v,i,j}^{n+1} - T_{v,i,j}^n) + T_{v,i-1,j}^{n+1} - T_{v,i-1,j}^n}{h_z^2 k}. \quad (13)$$

Разностные уравнения с использованием вспомогательного (промежуточного) временного слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} & \tau_q \rho c_v \frac{T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{v,i,j}^n + T_{v,i,j}^{n-1}}{k^2} + \rho c_v \frac{T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{v,i,j}^n}{k} = \\ & = \lambda_v \frac{T_{v,i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_z^2} + \lambda_v \tau_T \frac{T_{v,i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{v,i+1,j}^n - 2\left(T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{v,i,j}^n\right) + T_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{v,i-1,j}^n}{h_z^2 k}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c_v \frac{T_{v,i,j}^{n+1} - T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k^2} + \rho c_v \frac{T_{v,i,j}^{n+1} - T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k} = \lambda_v \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - 2T_{v,i,j}^{n+1} + T_{v,i,j-1}^{n+1}}{h_r^2} + \\ + \frac{\lambda_v}{h_r(j-1)} \cdot \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - T_{v,i,j-1}^{n+1}}{2h_r} + \lambda_v \tau_T \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - T_{v,i,j+1}^n - 2(T_{v,i,j}^{n+1} - T_{v,i,j}^n) + T_{v,i,j-1}^{n+1} - T_{v,i,j-1}^n}{h_r^2 k} + \\ + \frac{\lambda_v \tau_T}{h_r(j-1)} \cdot \frac{T_{v,i,j+1}^{n+1} - T_{v,i,j+1}^n - T_{v,i,j-1}^{n+1} + T_{v,i,j-1}^n}{2h_r k}. \end{aligned} \quad (15)$$

где $i = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{2, M-1}$, $n = \overline{1, K-1}$.

Реализация метода прогонки для трехслойной разностной схемы с учетом вспомогательного временного слоя осуществляется на основе преобразования уравнений (14) и (15) к стандартному трёхдиагональному виду:

$$A_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot T_{v,i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot T_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$A_{v,i,j}^{n+1} \cdot T_{v,i,j+1}^{n+1} - B_{v,i,j}^{n+1} \cdot T_{v,i,j}^{n+1} + C_{v,i,j}^{n+1} \cdot T_{v,i,j-1}^{n+1} = F_{v,i,j}^{n+1}, \quad (17)$$

где $A_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \lambda_v k (k + \tau_T)$, $B_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \rho c_v h_z^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_v k (k + \tau_T)$,

$$F_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = h_z^2 \tau_q \rho c_v T_{v,i,j}^{n-1} + \lambda_v \tau_T k (T_{v,i-1,j}^n + T_{v,i+1,j}^n - 2T_{v,i,j}^n) - \rho c_v h_z^2 (2\tau_q + k) T_{v,i,j}^n,$$

$$A_{v,i,j}^{n+1} = \lambda_v k (k + \tau_T) \left(1 + \frac{1}{2(j-1)} \right), \quad C_{v,i,j}^{n+1} = \lambda_v k (k + \tau_T) \left(1 - \frac{1}{2(j-1)} \right),$$

$$B_{v,i,j}^{n+1} = \rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_v k (k + \tau_T),$$

$$F_{v,i,j}^{n+1} = \lambda_v \tau_T k \left[T_{v,i,j-1}^n \left(1 - \frac{1}{2(j-1)} \right) + T_{v,i,j+1}^n \left(1 + \frac{1}{2(j-1)} \right) \right] - 2\lambda_v \tau_T k T_{v,i,j}^n - \rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) T_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Расчетные формулы для значений прогоночных коэффициентов на вспомогательном и верхнем временных слоях получены из уравнений (16) и (17) с использованием основного соотношения прогонки:

$$\alpha_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{A_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{B_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \beta_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \beta_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{B_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{v,i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (18)$$

$$\alpha_{v,i,j}^{n+1} = \frac{A_{v,i,j}^{n+1}}{B_{v,i,j}^{n+1} - C_{v,i,j}^{n+1} \cdot \alpha_{v,i,j-1}^{n+1}}, \quad \beta_{v,i,j}^{n+1} = \frac{C_{v,i,j}^{n+1} \cdot \beta_{v,i,j-1}^{n+1} - F_{v,i,j}^{n+1}}{B_{v,i,j}^{n+1} - C_{v,i,j}^{n+1} \cdot \alpha_{v,i,j-1}^{n+1}}. \quad (19)$$

Вывод формулы для расчёта значений $F_{1,i,j}^{\frac{1}{2}}$ на первом вспомогательном временном слое первой стадии осуществлялся с использованием соотношения $T_{1,i,j}^{-1} = T_{1,i,j}^0$, полученного из второго начального условия:

$$F_{1,i,j}^{\frac{1}{2}} = \lambda_1 \tau_T k (T_{1,i-1,j}^0 + T_{1,i+1,j}^0 - 2T_{1,i,j}^0) - \rho c_1 h_z^2 (\tau_q + k) T_{1,i,j}^0. \quad (20)$$

Формулы для $F_{v,i,j}^{\frac{1}{2}}$ первого вспомогательного временного слоя второй и третьей стадий были получены на основе применения соотношения $T_{v,i,j}^{-1} = T_{v-1,i,j}^{K-1}$, выведенного с использованием начальных условий при одинаковом шаге по времени для всех периодов, иначе $T_{v,i,j}^{-1} = T_{v,i,j}^0 - \frac{k_v}{k_{v-1}} (T_{v,i,j}^0 - T_{v-1,i,j}^{K-1})$:

$$F_{v,i,j}^{\frac{1}{2}} = \lambda_v \tau_T k (T_{v,i-1,j}^0 + T_{v,i+1,j}^0 - 2T_{v,i,j}^0) - \rho c_v h_z^2 (2\tau_q + k) T_{v,i,j}^0 + \tau_q \rho c_v h_z^2 T_{v-1,i,j}^{K-1}. \quad (21)$$

Вывод расчетных формул для начальных коэффициентов прогонки на вспомогательном временном слое $\alpha_{v,1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \beta_{v,1,j}^{n+\frac{1}{2}}$ осуществлялся за счет использования уравнения (16) с подстановкой соотношений для дискретной функции в фиктивных узлах, полученных из граничного условия при $z=0$ с погрешностью аппроксимации $O(h_z^2)$:

$$\alpha_{v,1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda_v k (k + \tau_T)}{\rho c_v h_z^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_v k (\tau_T + k)}, \quad (22)$$

$$\beta_{v,1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda_v \tau_T k (T_{v,1,j}^n - T_{v,2,j}^n) + h_z^2 \rho c_v [T_{v,1,j}^n (2\tau_q + k) - T_{v,1,j}^{n-1} \tau_q]}{\rho c_v h_z^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_v k (\tau_T + k)}. \quad (23)$$

Определение начальных прогоночных коэффициентов на первом вспомогательном временном слое первой стадии проводилось с использованием соотношения для фиктивных узлов $T_{1,1,j}^{-1} = T_{1,1,j}^0$:

$$\beta_{1,1,j}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda_1 \tau_T k (T_{1,1,j}^0 - T_{1,2,j}^0) + h_z^2 \rho c_1 (\tau_q + k) T_{1,1,j}^0}{\rho c_1 h_z^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_1 k (\tau_T + k)}. \quad (24)$$

При получении формул для расчета начальных прогоночных коэффициентов на первом вспомогательном временном слое второй и третьей стадий использовалось соотношение для фиктивных узлов $T_{v,1,j}^{-1} = T_{v-1,1,j}^{K-1}$:

$$\beta_{v,1,j}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda_v \tau_T k (T_{v,1,j}^0 - T_{v,2,j}^0) + h_z^2 \rho c_v [T_{v,1,j}^0 (2\tau_q + k) - T_{v-1,1,j}^{K-1} \tau_q]}{\rho c_v h_z^2 (\tau_q + k) + 2\lambda_v k (k + \tau_T)}. \quad (25)$$

Учитывая особенность уравнения (4), его вид в точке $r = 0$ был получен при устремлении r к нулю и при раскрытии неопределенности по правилу Лопиталя:

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c_v \frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial \tau^2} + \rho c_v \frac{\partial T_v(r, z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_v \left(\frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 T_v(r, z, \tau)}{\partial r^2} \right) + \\ + \lambda_v \tau_T \left(\frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial z^2 \partial \tau} + 2 \frac{\partial^3 T_v(r, z, \tau)}{\partial r^2 \partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Разностное уравнение (15) с учётом уравнения (26) для $j = 1$ представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c_v \frac{T_{v,i,1}^{n+1} - T_{v,i,1}^{n+\frac{1}{2}}}{k^2} + \rho c_v \frac{T_{v,i,1}^{n+1} - T_{v,i,1}^{n+\frac{1}{2}}}{k} = 2\lambda_v \frac{T_{v,i,2}^{n+1} - 2T_{v,i,1}^{n+1} + T_{v,i,0}^{n+1}}{h_r^2} + \\ + 2\lambda_v \tau_T \frac{T_{v,i,2}^{n+1} - T_{v,i,2}^n - 2(T_{v,i,1}^{n+1} - T_{v,i,1}^n) + T_{v,i,0}^{n+1} - T_{v,i,0}^n}{h_r^2 k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы начальных коэффициентов прогонки для верхнего временного слоя $\alpha_{v,i,1}^{n+1}, \beta_{v,i,1}^{n+1}$ получены с использованием уравнения (27) и с подстановкой соотношений для фиктивных узлов, выведенных из граничного условия при $r=0$ с точностью $O(h_r^2)$:

$$\alpha_{v,i,1}^{n+1} = \frac{4\lambda_v k (\tau_T + k)}{\rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) + 4\lambda_v k (\tau_T + k)}, \quad (28)$$

$$\beta_{v,i,1}^{n+1} = \frac{4\lambda_v \tau_T k (T_{v,i,1}^n - T_{v,i,2}^n) + h_r^2 \rho c_v (\tau_q + k) T_{v,i,1}^{n+\frac{1}{2}}}{\rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) + 4\lambda_v k (\tau_T + k)}. \quad (29)$$

Получение расчетных формул для значений температуры на границах $z=L$ и $r=R$ основано на использовании аппроксимации соответствующего граничного условия с погрешностью $O(h_z^2 + kh_z)$ и $O(h_r^2 + kh_r)$, а также соотношения прогонки для вспомогательного слоя

$$T_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot T_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \text{верхнего} \quad \text{временного} \quad \text{слоя}$$

$$T_{v,i,M-1}^{n+1} = \alpha_{v,i,M-1}^{n+1} \cdot T_{v,i,M}^{n+1} + \beta_{v,i,M-1}^{n+1} :$$

$$T_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_v k \left(F_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} \beta_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right)}{A_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[\lambda_v \alpha_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} (k + 2\tau_T) - 2\lambda_v \tau_T - 2\gamma_v h_z (k + \tau_q) \right] + \lambda_v k \left(C_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} \alpha_{v,N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} \right)} ; \quad (30)$$

$$T_{v,i,M}^{n+1} = \frac{\lambda_v k \left(F_{v,i,M}^{n+1} - C_{v,i,M}^{n+1} \beta_{v,i,M-1}^{n+1} \right)}{A_{v,i,M}^{n+1} \left[\lambda_v \alpha_{v,i,M-1}^{n+1} (k + 2\tau_T) - 2\lambda_v \tau_T - 2\gamma_v h_r (k + \tau_q) \right] + \lambda_v k \left(C_{v,i,M}^{n+1} \alpha_{v,i,M-1}^{n+1} - B_{v,i,M}^{n+1} \right)} -$$

$$\frac{A_{v,i,M}^{n+1} \left[\lambda_v \beta_{v,i,M-1}^{n+1} (k + 2\tau_T) + 2\lambda_v \tau_T (T_{v,i,M}^n - T_{v,i,M-1}^n) + 2\gamma_v h_r (\tau_q T_{v,i,M}^n + k T_f) \right]}{A_{v,i,M}^{n+1} \left[\lambda_v \alpha_{v,i,M-1}^{n+1} (k + 2\tau_T) - 2\lambda_v \tau_T - 2\gamma_v h_r (k + \tau_q) \right] + \lambda_v k \left(C_{v,i,M}^{n+1} \alpha_{v,i,M-1}^{n+1} - B_{v,i,M}^{n+1} \right)}, \quad (31)$$

где $A_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} = A_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, $A_{v,i,M}^{n+1} = \lambda_v k (k + \tau_T) \left(1 + \frac{1}{2(M-1)} \right)$, $B_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} = B_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, $B_{v,i,M}^{n+1} = B_{v,i,j}^{n+1}$,

$$C_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} = C_{v,i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$
, $C_{v,i,M}^{n+1} = \lambda_v k (k + \tau_T) \left(1 - \frac{1}{2(M-1)} \right)$, $F_{v,N,j}^{n+\frac{1}{2}} = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,N-1,j}^n - T_{v,N,j}^n) +$

$$+ \rho c_v \tau_q h_z^2 T_{v,N,j}^{n-1} - 2\lambda_v \tau_T^2 (T_{v,N,j}^n - T_{v,N,j}^{n-1} - T_{v,N-1,j}^n + T_{v,N-1,j}^{n-1}) - \rho c_v h_z^2 (2\tau_q + k) T_{v,N,j}^n -$$

$$- 2\gamma_v \tau_T h_z k \left[T_{v,N,j}^n - T_f + \frac{\tau_q}{k} (T_{v,N,j}^n - T_{v,N,j}^{n-1}) \right], \quad F_{v,i,M}^{n+1} = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,i,M-1}^n - T_{v,i,M}^n)$$

$$- \rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) T_{v,i,M}^{n+\frac{1}{2}} - 2\lambda_v \tau_T^2 \left(1 + \frac{1}{2(M-1)} \right) (T_{v,i,M}^n - T_{v,i,M}^{n-1} - T_{v,i,M-1}^n + T_{v,i,M-1}^{n-1}) -$$

$$- 2\gamma_v \tau_T h_r k \left(1 + \frac{1}{2(M-1)} \right) \left[T_{v,i,M}^n - T_f + \frac{\tau_q}{k} (T_{v,i,M}^n - T_{v,i,M}^{n-1}) \right].$$

Формулы для определения значений $F_{1,N,j}^{\frac{1}{2}}$ и $F_{1,i,M}^1$ на первом временном слое первого периода получены с использованием соотношений для фиктивных узлов $T_{1,N,j}^{-1} = T_{1,N,j}^0$ и $T_{1,i,M}^{-1} = T_{1,i,M}^0$:

$$F_{1,N,j}^{\frac{1}{2}} = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,N-1,j}^0 - T_{v,N,j}^0) - 2\gamma_v \tau_T h_z k (T_{v,N,j}^0 - T_f) - \rho c_v h_z^2 (\tau_q + k) T_{v,N,j}^0, \quad (32)$$

$$F_{1,i,M}^1 = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,i,M-1}^0 - T_{v,i,M}^0) - \rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) T_{1,i,M}^{\frac{1}{2}} - 2\gamma_v \tau_T h_r k \left(1 + \frac{1}{2(M-1)}\right) (T_{1,i,M}^0 - T_f). \quad (33)$$

Расчетные формулы для $F_{v,N,j}^{\frac{1}{2}}$ и $F_{1,i,M}^1$ на первом временном слое второго и третьего периодов определялись с применением соотношений для фиктивных узлов $T_{v,N,j}^{-1} = T_{v-1,N,j}^{K-1}$ и $T_{v,i,M}^{-1} = T_{v-1,i,M}^{K-1}$:

$$F_{v,N,j}^{\frac{1}{2}} = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,N-1,j}^0 - T_{v,N,j}^0) - 2\lambda_v \tau_T^2 (T_{v,N,j}^0 - T_{v,N,j}^{K-1} - T_{v,N-1,j}^0 + T_{v,N-1,j}^{K-1}) + \\ + T_{v,N,j}^{K-1} \tau_q \rho c_v h_z^2 - \rho c_v h_z^2 (2\tau_q + k) T_{v,N,j}^0 - 2\gamma_v \tau_T h_z k \left[T_{v,N,j}^0 - T_f + \frac{\tau_q}{k} (T_{v,N,j}^0 - T_{v,N,j}^{K-1}) \right], \quad (34)$$

$$F_{v,i,M}^1 = 2\lambda_v \tau_T k (T_{v,i,M-1}^0 - T_{v,i,M}^0) - 2\lambda_v \tau_T^2 \left(1 + \frac{1}{2(M-1)}\right) (T_{v,i,M}^0 - T_{v,i,M}^{K-1} - T_{v,i,M-1}^0 + T_{v,i,M-1}^{K-1}) - \\ - \rho c_v h_r^2 (\tau_q + k) T_{v,i,M}^{\frac{1}{2}} - 2\gamma_v \tau_T h_r k \left(1 + \frac{1}{2(M-1)}\right) \left[T_{v,i,M}^0 - T_f + \frac{\tau_q}{k} (T_{v,i,M}^0 - T_{v,i,M}^{K-1}) \right]. \quad (35)$$

Алгоритм модифицированного метода прогонки предусматривал использование процедуры последовательного вычисления значений дискретной функции на вспомогательном (промежуточном) и верхнем временных слоях с реализацией прямой и обратной прогонки. На этапе прямой прогонки с учётом рассматриваемого периода процесса осуществлялось определение прогоночных коэффициентов на вспомогательном временном слое с использованием формул (18), (20) – (25), при обратной прогонке рассчитывалось температурное поле с применением формулы (30), (32), (34) для определения температуры на границе $z=L$ и с использованием основного соотношения прогонки для всех остальных узлов сетки текущего слоя. В дальнейшем для каждой стадии процесса повторно реализовывались прямая прогонка на верхнем временном слое с применением формул (19), (28), (29) и обратная прогонка для расчета температурного поля с использованием формул (31), (33), (35) для вычисления температуры на границе $r=R$.

Безусловная устойчивость предложенной неявной разностной схемы в сочетании с ненулевыми значениями знаменателей прогоночных коэффициентов и выполнением условия, обеспечивающего отсутствие быстрого роста погрешности округления, обуславливает эффективное применение данного метода.

Результаты расчёта температурного поля для тела цилиндрической формы на примере полиметилметакрилата при условии внезапного нагрева на основе модели с двухфазным запаздыванием в трехпериодном процессе

Calculation results for the cylindrical body temperature field by the example of polymethyl methacrylate under the sudden heating condition based on a model with a two-phase delay in a three-period process

Программа численного решения краевой задачи нестационарного конвективного теплообмена для тела цилиндрической формы из низкотеплопроводного материала с использованием гиперболического уравнения с двухфазным запаздыванием, отражающего явление релаксации теплового потока и термическое демпфирование (4)–(10) реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++.

Расчёт температурного поля проводился для круглого диска из полиметилметакрилата толщиной 6 мм и диаметром 56,6 мм с использованием описанного метода и полученных расчетных формул. Вычисление теплофизических характеристик полиметилметакрилата в рамках конкретного временного периода осуществлялось по формулам:⁴ $\lambda_v = 0,188 + T^* \cdot 10^{-4} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\rho = 1188 \text{ кг/м}^3$, $c_v = 1076 + 3,64 \cdot T^* \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, где величина T^* для первой стадии принималась равной начальной температуре $T_0 = 22,94 \text{ }^\circ\text{C}$, на второй стадии рассматривалась как средняя температура $\frac{T_0 + T_f}{2}$, а на третьей стадии приравнивалась к температуре среды $T_f = 70,25 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи рассматривался одинаковым для всей поверхности круглого диска на протяжении каждого отдельного временного периода $\alpha_1 = 1016 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = 739 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.⁵ Продолжительность первого временного периода $\tau_1 = 4,5 \text{ с}$, третий и второй периоды имели временные границы $\tau_2 = 100 \text{ с}$ и $\tau_3 = 200 \text{ с}$. Время термического демпфирования и время тепловой релаксации $\tau_T = \tau_q = 1,48 \text{ с}$.

⁴ Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстропротекающего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. с. 83–84.

⁵ Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстропротекающего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. с. 86–87.

Рисунок 1. Результаты изменения температуры во времени в течение первого периода: $T_1(0,0,\tau)$, $T_1(0,L,\tau) - TC1_0$, $TC1_1$ и $T_1(R,0,\tau)$, $T_1(R,L,\tau) - TR1_0$, $TR1_1$ (разработано авторами)

Figure 1. Results of temperature change overtime during the first period: $T_1(0,0,\tau)$, $T_1(0,L,\tau) - TC1_0$, $TC1_1$ и $T_1(R,0,\tau)$, $T_1(R,L,\tau) - TR1_0$, $TR1_1$ (developed by the authors)

Рисунок 2. Результаты изменения температуры во времени в течение второго периода: $T_2(0,0,\tau)$, $T_2(0,L,\tau) - TC2_0$, $TC2_1$ и $T_2(R,0,\tau)$, $T_2(R,L,\tau) - TR2_0$, $TR2_1$ (разработано авторами)

Figure 2. Results of temperature changes overtime during the second period: $T_2(0,0,\tau)$, $T_2(0,L,\tau) - TC2_0$, $TC2_1$ и $T_2(R,0,\tau)$, $T_2(R,L,\tau) - TR2_0$, $TR2_1$ (developed by the authors)

Рисунок 3. Результаты изменения температуры во времени в течение третьего периода: $T_3(0,0,\tau)$, $T_3(0,L,\tau)$ – TC_{3_0} , TC_{3_1} и $T_3(R,0,\tau)$, $T_3(R,L,\tau)$ – TR_{3_0} , TR_{3_1} (разработано авторами)

Figure 3. Results of temperature changes over time during the third period: $T_3(0,0,\tau)$, $T_3(0,L,\tau)$ – TC_{3_0} , TC_{3_1} и $T_3(R,0,\tau)$, $T_3(R,L,\tau)$ – TR_{3_0} , TR_{3_1} (developed by the authors)

Рисунок 4. Совмещенные результаты изменения температуры во времени в течение первого и второго периодов: $T_v(0,0,\tau)$, $T_v(0,L,\tau)$ – TC , TCh и $T_v(R,0,\tau)$, $T_v(R,L,\tau)$ – TR , TRh (разработано авторами)

Figure 4. Combined results of temperature changes overtime during the first and second periods: $T_v(0,0,\tau)$, $T_v(0,L,\tau)$ – TC , TCh и $T_v(R,0,\tau)$, $T_v(R,L,\tau)$ – TR , TRh) (developed by the authors)

На рисунках 1–3 представлены результаты расчёта температурного поля для круглого диска из полиметилметакрилата при условии внезапного нагревания как графики распределения температуры в центре диска и на его поверхностях $T_v(0,0,\tau)$, $T_v(R,0,\tau)$, $T_v(0,L,\tau)$, $T_v(R,L,\tau)$ в течение первого, второго и третьего периодов (рисунок).

Совмещенные результаты расчета температурного поля для первого и второго периодов в центре диска и на его поверхностях представлены на рисунке 4.

Подтверждением достоверности полученных результатов является их сравнимость с теоретическими расчётами на основе операционного метода и экспериментальными значениями, представленными в исследовании⁶. Результаты данного исследования позволяют сделать вывод об адекватности описания нестационарного конвективного теплообмена в условиях внезапного нагревания для цилиндрического тела из низкотеплопроводного материала гиперболическим уравнением с двухфазным запаздыванием с учетом тепловой релаксации и термического демпфирования.

Заключение

Conclusion

Исследования в направлении моделирования динамики температурных полей при описании переходных термических процессов для твердых тел имеют разнообразные применения в самых различных научно-технических областях. Использование численных методов позволяет получить результат с заданной точностью и значительно сократить временные затраты на разработку технологии с прогнозированием качественных характеристик. Несомненно, преимущество применения численных методов при решении нестационарных задач теплообмена для тел сложных комбинированных форм, связанных и многослойных структур.

Полученные результаты и представленная модель переходного термического процесса в условиях конвективного теплообмена для цилиндрического тела из низкотеплопроводного материала на основе гиперболического уравнения теплопроводности с двухфазным запаздыванием могут использоваться при разработке программных комплексов для численного моделирования различных задач нестационарной теплопроводности с учетом релаксационных явлений при

⁶ Юдахин А.Е. Исследование моделей теплопроводности в условиях быстротекущего термического процесса в низкотеплопроводном твердом теле: дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2017. с. 92–93.

анализе технологических процессов для расчета температурных полей тел из полимерных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Раскутин А.Е.** Стратегия развития полимерных композиционных материалов / А.Е. Раскутин // Авиационные материалы и технологии. – 2017. – № S. – С. 344–348.
2. **Дориомедов М.С.** Полимерные композиционные материалы в железнодорожном транспорте России (обзор) / М.С. Дориомедов, М.И. Дасковский, С.Ю. Скрипачев, Е.А. Шеин. – DOI [10.18577/2307-6046-2016-0-7-12-12](https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-7-12-12) // Труды ВИАМ. – 2016. – № 7. – С. 113–118. – URL: http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=988 (дата обращения: 19.06.2020).
3. **Пименов В.Г.** Численный метод моделирования управляемого уравнения теплопроводности с запаздыванием / В.Г. Пименов, А.Б. Пименов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т 18, № 5–2. – С. 2635–2636.
4. **Парфентьев Н.А.** Математическое моделирование теплового режима конструкций при фазовых переходах / Н.А. Парфентьев, Н.А. Парфентьева // Вестник МГСУ. – 2011. – Т 6, № 4. – С. 320–322. – URL: <http://vestnikmgsu.ru/ru/component/sjarchive/issue/issue.download/2011/4/pdf> (дата обращения: 08.06.2020). – Рез. англ.
5. **Якушкин М.М.** Влияние процессов релаксации на перенос тепла, возникающего под действием интенсивных потоков энергии / М.М. Якушкин // Физика и химия обработки материалов. – 2010. – № 3. – С. 27–33.
6. **Фильштинский Л.А.** Применение неклассических моделей теплопроводности для расчётов тепловых полей в элементах конструкций / Л.А. Фильштинский, Т.А. Киричек // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – № 7. – С. 162–170.
7. **Majchrzak E.** First and second order dual phase lag equation. Numerical solution using the explicit and implicit schemes of the finite difference method / E. Majchrzak, B. Mochnecki. – DOI [10.1051/mateconf/201824005018](https://doi.org/10.1051/mateconf/201824005018) // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Т 240. – URL: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2018/99/mateconf_icchmt2018_05018/mateconf_icchmt2018_05018.html (дата обращения: 10.02.2020).
8. **Wang P.** Forced oscillation of a class of neutral hyperbolic differential equations / P. Wang, Y. Wu, L. Caccetta. – DOI [10.1016/j.cam.2004.09.021](https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.09.021) // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2005. – Т 177, № 2. – С. 301–308. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042704004273> (дата обращения: 14.03.2020).
9. **Sadhasivam V.** Oscillation of Impulsive Hyperbolic Differential Equations with Distributed Delay / V. Sadhasivam, T. Kalaimani, K. Logarasi. – DOI [10.15613/sjrs/2017/v4i1/172389](https://doi.org/10.15613/sjrs/2017/v4i1/172389) // ScieXplore: International Journal of Research in Science. – 2017. – Т 4, № 1. – С. 7–12. – URL: <http://www.i-scholar.in/index.php/sjrs/article/view/172389> (дата обращения: 28.04.2020).

10. **Wang P.** Oscillatory criteria of nonlinear hyperbolic equations with continuous deviating arguments / P. Wang. – DOI [10.1016/S0096-3003\(98\)10110-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)10110-8) // Applied Mathematics and Computation. – 1999. – Т 106. – С. 163–169. – URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Oscillatory-criteria-of-nonlinear-hyperbolic-with-Peiguang/dd7ca60de8c4ef965cb7ae57ab36a239483954ff> (дата обращения: 11.04.2020).
11. **Wang P.** Oscillation criteria of nonlinear hyperbolic equations with functional arguments / P. Wang, Jiuli Zhao, W. Ge. – DOI [10.1016/S0898-1221\(00\)00176-0](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00176-0) // Computers & Mathematics with Applications. – 2000. – Т 40, № 4–5. – С. 513–521. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122100001760> (дата обращения: 22.02.2020).
12. **Harikrishnan S.** Forced oscillation of nonlinear impulsive functional hyperbolic differential system / S. Harikrishnan, P. Prakash, J. Nieto // Communications in Applied Analysis. – 2014. – № 18. – С. 523–536.
13. **Петрова Л.С.** Математическое моделирование процессов высокоинтенсивного нагрева тел с покрытиями при обработке поверхности лазерным излучением / Л.С. Петрова, Я.В. Крюкова // Известия Транссиба. – 2018. – № 1. – С. 118–129.
14. **Петрова Л.С.** Математическое моделирование переходных термических процессов с учётом явлений тепловой релаксации и термического демпфирования / Л.С. Петрова, Е.В. Заец // Вестник СибГУТИ. – 2019. – № 2. – С. 13–20.
15. **Pimenov V.G.** Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type / V.G. Pimenov, E.E. Tashirova. – DOI [10.1134/S008154381305012X](https://doi.org/10.1134/S008154381305012X) // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Т 281, № 1. – С. 126–136. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S008154381305012X> (дата обращения: 02.03.2020).
16. **Кирсанов Ю.А.** Многопериодная краевая задача гиперболической двумерной теплопроводности третьего рода / Ю.А. Кирсанов, А.Ю. Кирсанов, А.Е. Юдахин // Труды Академэнерго. – 2016. – № 4. – С. 32–41.

Сведения об авторах:

Петрова Лилия Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика» по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Омск, Россия, e-mail: petrov.306@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0951-2582>
РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=687889

Гаврилова Татьяна Игоревна – магистрант, Институт наземных транспортных систем, ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Омск, Россия, e-mail: tef@omgups.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9211-7462>

Статья получена: 20.07.2020. Принята к публикации: 05.09.2020. Опубликовано онлайн: 15.09.2020.

REFERENCES

1. Raskutin A.E. Russian polymer composite materials of new generation, their exploitation and implementation in advanced developed constructions. *Aviation Materials and Technologies*. 2017; (S): 344–348. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: [10.18577/2071-9140-2017-0-S-349-367](https://doi.org/10.18577/2071-9140-2017-0-S-349-367).
2. Doriomedov M.S., Daskovskiy M.I., Skripachev S.Yu., Shein E.A. [*Polymer composite materials in railway transport in Russia (review)*]. Proceedings of VIAM. 2016; (7): 113–118. (In Russ.) DOI: [10.18577/2307-6046-2016-0-7-12-12](https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-7-12-12).
3. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Numerical method for modeling controlled heatconduction equation with delay. *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. 2013; 18(5–2): 2635–2636. (In Russ., abstract in Eng.).
4. Parfentyev N.A., Parfentyeva N.A. Mathematical simulation of thermal regime of structures at phase transitions. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2011; 6(4): 320–322. Available at: <http://vestnikmgsu.ru/ru/component/sjarchive/issue/issue.download/2011/4/pdf> (accessed 8th June 2020). (In Russ., abstract in Eng.).
5. Yakunkin M.M. [*Influence of relaxation processes on heat transfer arising under the action of intense energy fluxes*]. Physics and Chemistry of Materials Treatment. 2010; (3): 27–33. (In Russ.).
6. Fil'shtinskiy L.A., Kirichek T.A. [*Application of nonclassical models of thermal conductivity for calculating thermal fields in structural elements*]. Aerospace engineering and technology. 2005; (7): 162–170. (In Russ.).
7. Majchrzak E., Mochnacki B. First and second order dual phase lag equation. Numerical solution using the explicit and implicit schemes of the finite difference method. *MATEC Web of Conferences*. 2018; 240. (In Eng.) DOI: [10.1051/mateconf/201824005018](https://doi.org/10.1051/mateconf/201824005018).
8. Wang P., Wu Y., Caccetta L. Forced oscillation of a class of neutral hyperbolic differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2005; 177(2): 301–308. (In Eng.) DOI: [10.1016/j.cam.2004.09.021](https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.09.021).
9. Sadhasivam V., Kalaimani T., Logarasi K. Oscillation of Impulsive Hyperbolic Differential Equations with Distributed Delay. *ScieXplore: International Journal of Research in Science*. 2017; 4(1): 7–12. (In Eng.) DOI: [10.15613/sjrs/2017/v4i1/172389](https://doi.org/10.15613/sjrs/2017/v4i1/172389).
10. Wang P. Oscillatory criteria of nonlinear hyperbolic equations with continuous deviating arguments. *Applied Mathematics and Computation*. 1999; 106: 163–169. (In Eng.) DOI: [10.1016/S0096-3003\(98\)10110-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)10110-8).
11. Wang P., Zhao J., Ge W. Oscillation criteria of nonlinear hyperbolic equations with functional arguments. *Computers & Mathematics with Applications*. 2000; 40(4–5): 513–521. (In Eng.) DOI: [10.1016/S0898-1221\(00\)00176-0](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00176-0).
12. Harikrishnan S., Prakash P., Nieto J. Forced oscillation of nonlinear impulsive functional hyperbolic differential system. *Communications in Applied Analysis*. 2014; (18): 523–536. (In Eng.).
13. Petrova L.S., Kryukova Ya.V. Mathematical modeling of high-intensity heating processes of bodies with coatings during surface processing by laser radiation. *Journal of Transsib Railway Studies*. 2018; (1): 118–129. (In Russ., abstract in Eng.).

14. Petrova L.S., Zaets E.V. Mathematical modeling of transition thermal processes taking into account effect of thermal relaxation and thermal damping. *Vestnik SibGUTI*. 2019; (2): 13–20. (In Russ., abstract in Eng.).
 15. Pimenov V.G., Tashirova E.E. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013; 281(1): 126–136. (In Eng.) DOI: [10.1134/S008154381305012X](https://doi.org/10.1134/S008154381305012X).
 16. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu., Yudakhin A.E. Multiperiod two-dimensional hyperbolic heat conduction boundary problem of the third kind. *Transactions of Academenergo*. 2016; (4): 32–41. (In Russ., abstract in Eng.).
-

Information about the authors:

Liliya S. Petrova – Omsk State Transport University, Omsk, Russia, e-mail: petrov.306@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0951-2582>

РИИЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=687889

Tatyana I. Gavrilova – Omsk State Transport University, Omsk, Russia, e-mail: tef@omgups.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9211-7462>

Submitted: 20th July 2020. Revised: 5th September 2020. Published online: 16th September 2020.