

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2024, Том 11, № 4 / 2024, Vol. 11, Iss. 4 <https://t-s.today/issue-4-2024.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/04SATS424.pdf>

DOI: 10.15862/04SATS424 (<https://doi.org/10.15862/04SATS424>)

2.1.9. Строительная механика (технические науки)

УДК 539.4:624.04

## Расчет замкнутой цилиндрической оболочки из композиционного материала на внешнюю осесимметричную нагрузку

<sup>1</sup>Сурнин Д.А., <sup>1</sup>Шагивалеев К.Ф., <sup>1,2</sup>Овчинников И.И.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Саратовский государственный  
технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия

Автор, ответственный за переписку: Сурнин Дмитрий Аркадьевич, e-mail: [dasurnin98@mail.ru](mailto:dasurnin98@mail.ru)

**Аннотация.** Современный подход к проектированию конструкций — использование композитных конструкций, при создании которых путем сочетания разнородных компонентов можно получить требуемые эксплуатационные свойства. В виду широкого применения в инженерной практике оболочечных конструкций из композиционных материалов актуальной задачей является исследование их напряженно-деформированного состояния при эксплуатационном нагружении.

В работе рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка из ортотропного материала. Ставится задача исследования напряженно-деформированного состояния оболочки при нагружении внешним давлением. Применяется уточненная теория, учитывающая поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну.

Для решения разрешающего дифференциального уравнения используется операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа.

Для решения поставленной задачи авторами получены в общем виде аналитические выражения, с помощью которых можно определить напряженно-

деформированное состояние цилиндрической оболочки из ортотропного материала при разных геометрических параметрах оболочки и при разных упругих характеристиках материала. Внешняя осесимметричная нагрузка может быть приложена в любом месте по длине оболочки и может действовать на участках любых размеров.

В статье из общих аналитических выражений получены различные частные решения: решения для оболочки при действии осесимметричной нагрузки по всей поверхности оболочки, при действии сосредоточенной по длине оболочки осесимметричной нагрузки, при действии сосредоточенного по длине оболочки осесимметричного изгибающего момента.

В статье решены тестовые задачи: представлены результаты расчетов ортотропной замкнутой цилиндрической оболочки из углепластика при действии внешней осесимметричной нагрузки.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка; композиционный материал; осесимметричная нагрузка; напряженно-деформированное состояние; операционное исчисление; аналитическое решение; углепластик

## Calculation of a closed cylindrical shell made of composite material under external axisymmetric load

<sup>1</sup>Dmitry A. Surnin, <sup>1</sup>Kamil F. Shagivaleev, <sup>1,2</sup>Ilya I. Ovchinnikov

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

<sup>2</sup>Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

**Corresponding author:** Dmitry A. Surnin, e-mail: [dasurnin98@mail.ru](mailto:dasurnin98@mail.ru)

**Abstract.** The modern approach to structural design involves the use of composite structures, which allow for the desired operational properties to be achieved through the combination of heterogeneous components. Given the widespread application of shell structures made from composite materials in engineering practice, a relevant task is the investigation of their stress-strain state under operational loading conditions.

This study examines a closed cylindrical shell composed of an orthotropic material. The objective is to investigate the stress-strain state of the shell when subjected to external pressure loading. An advanced theory is applied that accounts for shear transverse deformations according to S.A. Ambarzumyan. Operational calculus related to Laplace transformation is utilized to solve the governing differential equation.

To address the posed problem, the authors derive analytical expressions in general form that can determine the stress-strain state of a cylindrical shell made of

orthotropic material for various geometric parameters and elastic characteristics of the material. The external axisymmetric load can be applied at any location along the length of the shell and can act on sections of any size.

The article presents various particular solutions derived from general analytical expressions: solutions for the shell under uniform axisymmetric load across its entire surface, under concentrated axisymmetric load along the length of the shell, and under concentrated axisymmetric bending moments along the length of the shell.

Test problems are solved in this paper, providing results for calculations of an orthotropic closed cylindrical shell made from carbon fiber composite under external axisymmetric loading.

**Keywords:** cylindrical shell; composite material; axisymmetric load; stress-strain state; operational calculus; analytical solution; carbon fiber composite

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons “Attribution” («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons “Attribution” 4.0 Global License



## Введение

### Introduction

Проблема поведения конструкций из композиционных материалов под нагрузкой является важной темой в современных исследованиях. Это связано с широким применением этих материалов в различных отраслях промышленности. Композиционные материалы представляют собой сплошные неоднородные материалы, которые состоят из двух или нескольких компонентов, не растворимых друг в друге. Среди компонентов этих материалов выделяют армирующие элементы, которые придают необходимые механические свойства новому материалу, и матрицу, которая объединяет армирующие элементы для совместной работы. Эффективность полученного материала зависит от выбора исходных компонентов, их рационального сочетания и технологии изготовления нового материала. Важным условием является совместимость армирующих материалов и матрицы, так как от этого зависит прочность связи между ними. В качестве армирующих компонентов используют стеклянные, углеродные, борные, высокомолекулярные органические элементы, обладающие высокой прочностью и жесткостью. Для соединения армирующих элементов используют полимерные, металлические, углеродные или керамические матрицы. Название композиционный материал получает в зависимости от типа матрицы [1].

Если в качестве матрицы используются полимерные материалы, то получаем полимерные композиционные материалы, которые образуют большую группу композиционных материалов. Одним из основных преимуществ матричных полимерных композитов является то, что эти материалы обладают более высокой механической прочностью относительно их плотности по сравнению с традиционными материалами.

Наиболее широко из полимерных композиционных материалов в разных областях промышленности применяют стеклопластики и углепластики.

Стеклопластики — недорогие полимерные композиты. Они обладают высокой прочностью, низкой теплопроводностью, атмосферостойкостью, высокими электроизоляционными свойствами. Композиты на основе стеклянных волокон широко используют в нефтегазовой отрасли, в строительстве, в судостроении, в радиоэлектронике, в автомобильной и железнодорожной технике [1; 2].

Углеродные волокна являются более хрупкими, менее технологичными, имеют низкую прочность сцепления на границе раздела компонентов, чем стеклянные. Но углеродные волокна имеют и достоинства: высокую жесткость, низкую плотность, сохранение своих

механических характеристик при высоких температурах (до 450°C) [1]. На основе этих волокон получают углепластики — очень прочные и легкие материалы. Их используют для производства деталей и конструкций, работающих в условиях повышенных температур. Углепластики применяют в авиационной, ракетно-космической, автомобильной промышленности, медицине [1; 3; 4].

Большое применение получили конструкции в виде оболочек из композиционных материалов. Например, цилиндрические оболочки используют в ракетных двигателях, в трехслойных корпусах композитных транспортно-пусковых контейнеров ракетных комплексов и других конструкциях [4; 5].

Тонкостенные оболочковые конструкции используются и в качестве оборудования нефтегазовой отрасли: трубы [2], вертикальные и горизонтальные резервуары, цистерны. Эти конструкции воспринимают основные внутренние и внешние эксплуатационные воздействия и, в конечном счете, определяют прочность, долговечность, надежность, живучесть и безопасность оборудования.

Для проектирования и совершенствования конструкций оболочек из композиционных материалов необходимо создание методик анализа напряженно-деформированного состояния оболочек и методик оценки прочности при эксплуатационных нагрузках.

Исследованием цилиндрических оболочек из композиционных материалов стали заниматься с середины прошлого века. И в настоящее время продолжается изучение таких конструкций. Результаты последних исследований представлены в работах [4–13]. В работах этих авторов приводятся результаты расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов как аналитические, так и численные. Численные расчеты проводятся чаще всего с использованием метода конечных элементов.

Важным звеном в этих исследованиях является получение аналитических решений. Важность аналитического решения становится очевидной, если учесть, что вычисление одного решения по конкретным исходным данным занимает миллисекунды. А вычисление численного решения может занимать несколько минут. Это порядки разницы во времени, и при рассмотрении сотен тысяч возможных решений преимущество готового аналитического решения становится очевидным.

Оболочки, изготовленные из волокнистых композиционных материалов, например, из углепластика или стеклопластика, обладают особенностью: армирующие элементы часто располагаются вдоль осей криволинейной системы координат оболочки. Это позволяет значительно упростить исходные уравнения, так как в этом случае конструкцию можно

считать ортотропной [14], а для ее расчета использовать теорию ортотропных оболочек.

В работе [1] автор отмечает, что большинство исследований конструкций из композиционных материалов ориентированы на научных работников, а не инженеров, которые рассчитывают, проектируют и участвуют в изготовлении этих конструкций. Решению этой проблемы и посвящена данная статья.

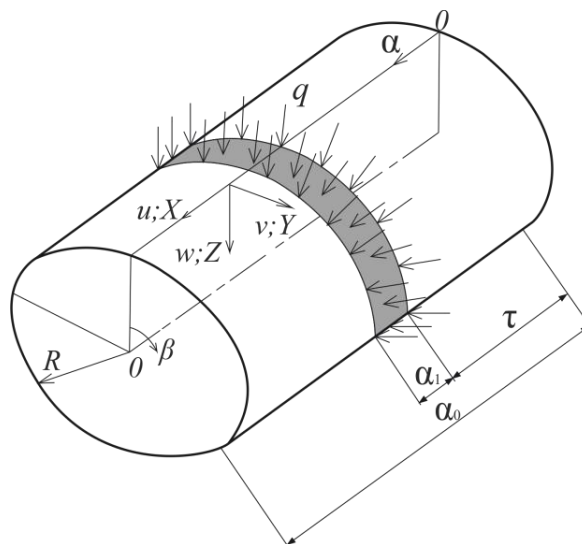
## Постановка задачи и результаты

### Problem statement and results

Ставится задача получения аналитических выражений для определения перемещений, усилий и моментов в замкнутой цилиндрической оболочке из ортотропного материала при действии внешней осесимметричной нагрузки.

Для решения поставленной задачи рассмотрим ортотропную замкнутую цилиндрическую оболочку (рис. 1) радиусом  $R$ , длиной  $L$ , толщиной  $h$  с шарнирными закреплениями по концам, находящуюся под действием радиальной осесимметричной нагрузки, действующей на части длины оболочки (1).

$$q(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \alpha < \tau ; \\ q, & \text{при } \tau \leq \alpha \leq \tau + \alpha_1 ; \\ 0, & \text{при } \tau + \alpha_1 < \alpha \leq \alpha_0 . \end{cases} \quad (1)$$



**Рисунок 1.** Схема нагружения цилиндрической оболочки радиальной осесимметричной нагрузкой (рисунок авторов)

**Figure 1.** Scheme of cylindrical shell loading with radial axisymmetric load (figure by the authors)

Граничные условия при рассматриваемом способе закрепления имеют вид:

$$\text{при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = \alpha_0 : w = M_1 = 0. \quad (2)$$

Разрешающее уравнение для ортотропной цилиндрической оболочки при действии осесимметричной нагрузки имеет вид [15]:

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} + 4\omega^4 w = \frac{qR^4}{D_{11}} - \frac{qR^3}{D_{11}} C_{12} b_1, \quad (3)$$

где:

$\alpha$  — безразмерная координата;

$R$  — радиус срединной поверхности оболочки;

$$\alpha_0 = \frac{L}{R};$$

$L$  — длина оболочки;

$w$  — радиальное перемещение оболочки;

$$4\omega^4 = \frac{E_2}{E_1} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{12R^2}{h^2}; \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)};$$

$E_1, E_2$  — модули упругости;

$\nu_1, \nu_2$  — коэффициенты Пуассона;

$h$  — толщина оболочки.

Обозначения, допущения, дифференциальные зависимости приняты в соответствии с работой [15].

В каждой точке оболочки главные направления упругости совпадают с направлениями соответствующих координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$ .

Чтобы удовлетворить граничные условия (2) надо положить  $b_1 = 0$ .

Для решения дифференциального уравнения (3) применим операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа.<sup>1</sup>

Полагая  $w(\alpha) \Leftrightarrow W(p)$  и учитывая граничные условия (2) при  $\alpha = 0$ , по теореме дифференцирования оригинала получим:

<sup>1</sup> Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. — М.: Наука, 1968. — 416 с.

$$\begin{aligned}w'(\alpha) &\Leftrightarrow pW(p); \\w''(\alpha) &\Leftrightarrow p^2W(p) - w'(0); \\w'''(\alpha) &\Leftrightarrow p^3W(p) - pw'(0); \\w^{IV}(\alpha) &\Leftrightarrow p^4W(p) - p^2w'(0) - w'''(0),\end{aligned}\tag{4}$$

где:

$p$  — комплексный параметр;

$w'(0)$  и  $w'''(0)$  — произвольные постоянные.

Правая часть уравнения (3) для рассматриваемой нагрузки (1) имеет вид<sup>1</sup>:

$$\frac{qR^4}{D_{11}} \frac{1 - e^{-p\alpha_1}}{p} e^{-p\tau}.\tag{5}$$

Переходя в уравнении (3) от оригиналов к изображениям (4), (5), получим операторное уравнение:

$$p^4 W(p) - p^2 w'(0) - w'''(0) + 4\omega^4 W(p) = \frac{qR^4}{D_{11}} \frac{1 - e^{-p\alpha_1}}{p} e^{-p\tau}.\tag{6}$$

Из уравнения (6) получим:

$$W(p) = \frac{qR^4}{D_{11}} \frac{1 - e^{-p\alpha_1}}{p(p^4 + 4\omega^4)} e^{-p\tau} + \frac{p^2}{p^4 + 4\omega^4} w'(0) + \frac{1}{p^4 + 4\omega^4} w'''(0).\tag{7}$$

Найдем искомое решение, переходя в выражении (7) от изображений к оригиналам [16]:

$$\begin{aligned}w(\alpha) &= \frac{qR^4}{D_{11}} \left[ (1 - Y_1) \eta(\alpha - \tau) - (1 - \bar{Y}_1) \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) \right] + \\&+ \frac{1}{2\omega} (X_2 + X_3) w'(0) + \frac{1}{4\omega^3} (X_2 - X_3) w'''(0).\end{aligned}\tag{8}$$

Из граничных условий (2) при  $\alpha = \alpha_0$  находим произвольные постоянные  $w'(0)$  и  $w'''(0)$ .

Окончательное выражение имеет вид:

$$\begin{aligned}w(\alpha) &= \frac{qR^2}{E_2 h} \left[ (1 - Y_1) \eta(\alpha - \tau) - (1 - \bar{Y}_1) \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) + (B_2 - C_2) X_2 - \right. \\&\left. - (B_3 - C_3) X_3 + d_1 X_2 - d_2 X_3 \right],\end{aligned}\tag{9}$$

где:

$\eta(\alpha - \tau)$  — единичная функция, которая при  $\alpha \geq \tau$  равна 1 и при  $\alpha < \tau$  равна 0;

$\eta(\alpha - \tau - \alpha_1)$  — единичная функция, которая при  $\alpha > \tau + \alpha_1$  равна 1 и при  $\alpha \leq \tau + \alpha_1$  равна 0;

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \omega \alpha \operatorname{ch} \omega \alpha ; & Y_1 &= \cos \omega (\alpha - \tau) \operatorname{ch} \omega (\alpha - \tau) ; \\ X_2 &= \sin \omega \alpha \operatorname{ch} \omega \alpha ; & Y_2 &= \sin \omega (\alpha - \tau) \operatorname{ch} \omega (\alpha - \tau) ; \\ X_3 &= \cos \omega \alpha \operatorname{sh} \omega \alpha ; & Y_3 &= \cos \omega (\alpha - \tau) \operatorname{sh} \omega (\alpha - \tau) ; \\ X_4 &= \sin \omega \alpha \operatorname{sh} \omega \alpha ; & Y_4 &= \sin \omega (\alpha - \tau) \operatorname{sh} \omega (\alpha - \tau) ; \\ \bar{Y}_1 &= \cos \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) \operatorname{ch} \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) ; \\ \bar{Y}_2 &= \sin \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) \operatorname{ch} \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) ; \\ \bar{Y}_3 &= \cos \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) \operatorname{sh} \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) ; \\ \bar{Y}_4 &= \sin \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) \operatorname{sh} \omega (\alpha - \tau - \alpha_1) ; \\ B_1 &= \cos \omega \tau \operatorname{ch} \omega \tau ; & C_1 &= \cos \omega (\tau + \alpha_1) \operatorname{ch} \omega (\tau + \alpha_1) ; \\ B_2 &= \sin \omega \tau \operatorname{ch} \omega \tau ; & C_2 &= \sin \omega (\tau + \alpha_1) \operatorname{ch} \omega (\tau + \alpha_1) ; \\ B_3 &= \cos \omega \tau \operatorname{sh} \omega \tau ; & C_3 &= \cos \omega (\tau + \alpha_1) \operatorname{sh} \omega (\tau + \alpha_1) ; \\ B_4 &= \sin \omega \tau \operatorname{sh} \omega \tau ; & C_4 &= \sin \omega (\tau + \alpha_1) \operatorname{sh} \omega (\tau + \alpha_1) ; \\ d_1 &= [-(B_1 - C_1) \sin 2\omega \alpha_0 + (B_4 - C_4) \operatorname{sh} 2\omega \alpha_0] (\cos 2\omega \alpha_0 - \operatorname{ch} 2\omega \alpha_0)^{-1} ; \\ d_2 &= [(B_1 - C_1) \operatorname{sh} 2\omega \alpha_0 + (B_4 - C_4) \sin 2\omega \alpha_0] (\cos 2\omega \alpha_0 - \operatorname{ch} 2\omega \alpha_0)^{-1} . \end{aligned}$$

Единичные функции  $\eta(\alpha - \tau)$  и  $\eta(\alpha - \tau - \alpha_1)$ , указывающие с какого значения координаты  $\alpha$  появляется в выражении данное слагаемое, используют только для сокращения записи выражений.

Запишем выражения для усилий и моментов, используя  $w(\alpha)$  [15]:

$$\begin{aligned} T_2(\alpha) &= -\frac{\Omega_1 w}{\omega_1 R} = -qR \left[ (1 - Y_1) \eta(\alpha - \tau) - (1 - \bar{Y}_1) \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) + (B_2 - C_2) X_2 - \right. \\ &\quad \left. - (B_3 - C_3) X_3 + d_1 X_2 - d_2 X_3 \right]; \\ M_1(\alpha) &= -C_{11} \frac{h^2}{12 R^2} \frac{d^2 w}{d \alpha^2} = -qR^2 \frac{1}{2 \omega^2} \left[ Y_4 \eta(\alpha - \tau) - \bar{Y}_4 \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) + (B_2 - C_2) X_3 + \right. \\ &\quad \left. + (B_3 - C_3) X_2 + d_1 X_3 + d_2 X_2 \right]; \\ M_2(\alpha) &= -C_{12} \frac{h^2}{12 R^2} \frac{d^2 w}{d \alpha^2} = -qR^2 \frac{V_2}{2 \omega^2} \left[ Y_4 \eta(\alpha - \tau) - \bar{Y}_4 \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) + (B_2 - C_2) X_3 + \right. \\ &\quad \left. + (B_3 - C_3) X_2 + d_1 X_3 + d_2 X_2 \right]; \end{aligned} \tag{10}$$

$$N_1(\alpha) = C_{11} \frac{h^2}{12 R^3} \frac{d^3 w}{d\alpha^3} = qR \frac{1}{2\omega} \left[ (Y_2 + Y_3) \eta(\alpha - \tau) - (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) \eta(\alpha - \tau - \alpha_1) + (B_2 - C_2)(X_1 - X_4) + (B_3 - C_3)(X_1 + X_4) + d_1(X_1 - X_4) + d_2(X_1 + X_4) \right],$$

где:

$$\omega_1 = C_{11} C_{66}; \quad \Omega_1 = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66}; \quad G_{12} = G;$$

$$C_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{12} = \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_2 E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{66} = G_{12} h.$$

Положительные направления усилий и моментов принимаем в соответствии с работой [17].

Расчет оболочки, с использованием формул (10) сводится к вычислению гиперболических функций. При выполнении практических расчетов оболочек с использованием гиперболических функций при больших значениях аргументов появляется разность больших чисел. В этом случае в выражениях необходимо перейти от гиперболических функций к показательным функциям.

При действии нагрузки по закону (1) (рис. 1), при  $2\omega\alpha_0 \geq 10$ .

На участке  $0 \leq \alpha < \tau$ :

$$w(\alpha) = \frac{qR^2}{E_2 h} [(B_2 - C_2)X_2 - (B_3 - C_3)X_3 + d_1X_2 - d_2X_3] \approx$$

$$\approx \frac{qR^2}{2E_2 h} (e^{\omega\tau_1} \cos \omega\tau_1 - e^{-\omega\tau_2} \cos \omega\tau_2 - e^{\omega\tau_3} \cos \omega\tau_3 + e^{-\omega\tau_4} \cos \omega\tau_4 - e^{\omega\tau_5} \cos \omega\tau_5 -$$

$$- e^{-\omega\tau_6} \cos \omega\tau_6 + e^{\omega\tau_7} \cos \omega\tau_7 + e^{-\omega\tau_8} \cos \omega\tau_7 + e^{\omega\tau_9} \cos \omega\tau_{10} + e^{-\omega\tau_{10}} \cos \omega\tau_{10} -$$

$$- e^{\omega\tau_{11}} \cos \omega\tau_{11} - e^{-\omega\tau_{12}} \cos \omega\tau_{11} + e^{-\omega\tau_{13}} \cos \omega\tau_1 - e^{\omega\tau_{14}} \cos \omega\tau_2 - e^{-\omega\tau_{15}} \cos \omega\tau_3 +$$

$$+ e^{\omega\tau_{16}} \cos \omega\tau_4).$$
(11)

На участке  $\tau \leq \alpha \leq \tau + \alpha_1$ :

$$w(\alpha) = \frac{qR^2}{E_2 h} [1 - Y_1 + (B_2 - C_2)X_2 - (B_3 - C_3)X_3 + d_1X_2 - d_2X_3] \approx$$

$$\approx \frac{qR^2}{E_2 h} \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{-\omega\tau_1} \cos \omega\tau_1 + e^{-\omega\tau_2} \cos \omega\tau_2 + e^{\omega\tau_3} \cos \omega\tau_3 - e^{-\omega\tau_4} \cos \omega\tau_4 - e^{\omega\tau_5} \cos \omega\tau_5 -$$

$$- e^{-\omega\tau_6} \cos \omega\tau_5 - e^{\omega\tau_7} \cos \omega\tau_7 - e^{-\omega\tau_8} \cos \omega\tau_7 - e^{\omega\tau_9} \cos \omega\tau_{10} - e^{-\omega\tau_{10}} \cos \omega\tau_{10} +$$

$$+ e^{\omega\tau_{11}} \cos \omega\tau_{11} + e^{-\omega\tau_{12}} \cos \omega\tau_{11} + e^{\omega\tau_{14}} \cos \omega\tau_2 + e^{-\omega\tau_{15}} \cos \omega\tau_3 - e^{\omega\tau_{16}} \cos \omega\tau_4 +$$

$$+ e^{\omega\tau_{17}} \cos \omega\tau_1) \right].$$
(12)

На участке  $\tau + \alpha_1 < \alpha \leq \alpha_0$ :

$$\begin{aligned}
 w(\alpha) &= \frac{qR^2}{E_2 h} \left[ -Y + \bar{Y}_1 + (B_2 - C_2)X_2 - (B_3 - C_3)X_3 + d_1X_2 - d_2X_3 \right] \approx \\
 &\approx \frac{qR^2}{2E_2 h} \left( -e^{-\omega\tau_1} \cos \omega\tau_1 - e^{-\omega\tau_2} \cos \omega\tau_2 + e^{-\omega\tau_3} \cos \omega\tau_3 + e^{-\omega\tau_4} \cos \omega\tau_4 + e^{\omega\tau_5} \cos \omega\tau_5 + \right. \\
 &+ e^{-\omega\tau_6} \cos \omega\tau_5 + e^{\omega\tau_7} \cos \omega\tau_7 + e^{-\omega\tau_8} \cos \omega\tau_7 - e^{\omega\tau_9} \cos \omega\tau_9 - e^{-\omega\tau_{10}} \cos \omega\tau_9 - \\
 &- e^{\omega\tau_{11}} \cos \omega\tau_{11} - e^{-\omega\tau_{12}} \cos \omega\tau_{11} - e^{\omega\tau_{14}} \cos \omega\tau_2 - e^{\omega\tau_{17}} \cos \omega\tau_1 + e^{\omega\tau_{16}} \cos \omega\tau_4 + \\
 &\left. + e^{\omega\tau_{18}} \cos \omega\tau_3 \right), \tag{13}
 \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \alpha - \tau; \quad \tau_2 = \alpha + \tau; \quad \tau_3 = \alpha - \tau - \alpha_1; \quad \tau_4 = \alpha + \tau + \alpha_1; \quad \tau_5 = \alpha - \tau - 2\alpha_0; \\
 \tau_6 &= \alpha - \tau + 2\alpha_0; \quad \tau_7 = \alpha + \tau - 2\alpha_0; \quad \tau_8 = \alpha + \tau + 2\alpha_0; \quad \tau_9 = \alpha - \tau - \alpha_1 - 2\alpha_0; \\
 \tau_{10} &= \alpha - \tau - \alpha_1 + 2\alpha_0; \quad \tau_{11} = \alpha + \tau + \alpha_1 - 2\alpha_0; \quad \tau_{12} = \alpha + \tau + \alpha_1 + 2\alpha_0; \\
 \tau_{13} &= \alpha - \tau + 4\alpha_0; \quad \tau_{14} = \alpha + \tau - 4\alpha_0; \quad \tau_{15} = \alpha - \tau - \alpha_1 + 4\alpha_0; \\
 \tau_{16} &= \alpha + \tau + \alpha_1 - 4\alpha_0; \quad \tau_{17} = \alpha - \tau - 4\alpha_0; \quad \tau_{18} = \alpha - \tau - \alpha_1 - 4\alpha_0.
 \end{aligned}$$

Используя выражения (9–13) можно рассчитать ортотропную замкнутую цилиндрическую оболочку при разных геометрических параметрах оболочки и при разных упругих характеристиках материала оболочки. Кольцевая нагрузка может быть приложена в любом месте по длине оболочки и иметь различные размеры участка нагружения  $\alpha_1$ .

В качестве примера для исследования напряженно-деформированного состояния рассмотрена цилиндрическая ортотропная оболочка, со следующими геометрическими параметрами:

$$\frac{R}{h} = 100; \quad \frac{L}{R} = 5; \quad R = 200 \text{ см}; \quad h = 2 \text{ см}. \tag{14}$$

Материал оболочки — углепластик [18], имеющий следующие характеристики:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 1,4 * 10^4 \text{ кН/см}^2; \\
 E_2 &= 0,097 * 10^4 \text{ кН/см}^2; \\
 G &= 0,55 * 10^3 \text{ кН/см}^2; \\
 \nu_1 &= 0,29; \\
 \nu_2 &= 0,02.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В таблице 1 и на рисунке 2 приведены результаты расчета ортотропной оболочки с исходными данными (14) и (15).

Таблица 1 / Table 1

Результаты расчета ортотропной оболочки при действии нагрузки по закону (1)  
Calculation results of the orthotropic shell under the loading according to the law (1)

$\alpha$	$w / \frac{qR^2}{E_2 h}$	$T_2 / qR$	$M_1 / qR^2 \frac{1}{2\omega^2}$	$N_1 / qR \frac{1}{2\omega}$
0	0	0	0	2.6E-07
0,25	2.81E-06	-2.81E-06	2.67E-06	-5.1E-06
0,5	-1.56E-05	1.56E-05	1.28E-05	2.77E-06
0,75	-5.93E-05	5.93E-05	-9.2E-05	0.000151
1	0.000528	-0.000528	-0.00026	-0.00027
1,25	0.001072	-0.001072	0.002994	-0.00407
1,5	-0.016709	0.016709	0.003895	0.012813
1,75	-0.010554	0.010554	-0.09197	0.102521
2	0.499471	-0.499471	-0.00026	-0.49973
2,25	1.009539	-1.009539	-0.08906	0.106743
2,5	1.033448	-1.033448	0.007817	0
2,75	1.009539	-1.009539	-0.08906	-0.10674
3	0.499471	-0.499471	0.000261	0.499733
3,25	-0.01055	0.01055	-0.09197	-0.10252
3,5	-0.01671	0.01671	0.003895	-0.01281
3,75	0.001072	-0.001072	0.002994	0.004066
4	0.000528	-0.000528	-0.00026	0.000268
4,25	-5.9E-05	5.9E-05	-9.2E-05	-0.00015
4,5	-1.6E-05	1.6E-05	1.28E-05	-2.8E-06
4,75	2.8098E-06	-2.8098E-06	2.672E-06	5.1283E-06
5	0	0	0	-2.6E-07

Примечание:  $\tau = 2$ ;  $\alpha_1 = 1$ . Составлено авторами / Note:  $\tau = 2$ ;  $\alpha_1 = 1$ . Compiled by the authors

Из выражений (9) и (10) можно получить частные решения.

Если принять  $\tau = 0$  и  $\alpha_1 = \alpha_0$ , то получим решение, когда нагрузка действует по всей поверхности ортотропной оболочки:

$$w(\alpha) = \frac{qR^2}{E_2 h} (1 - X_1 + d_3 X_2 + d_4 X_3), \quad (16)$$

где:

$$d_3 = -\frac{\sin \omega \alpha_0}{\cos \omega \alpha_0 + ch \omega \alpha_0};$$

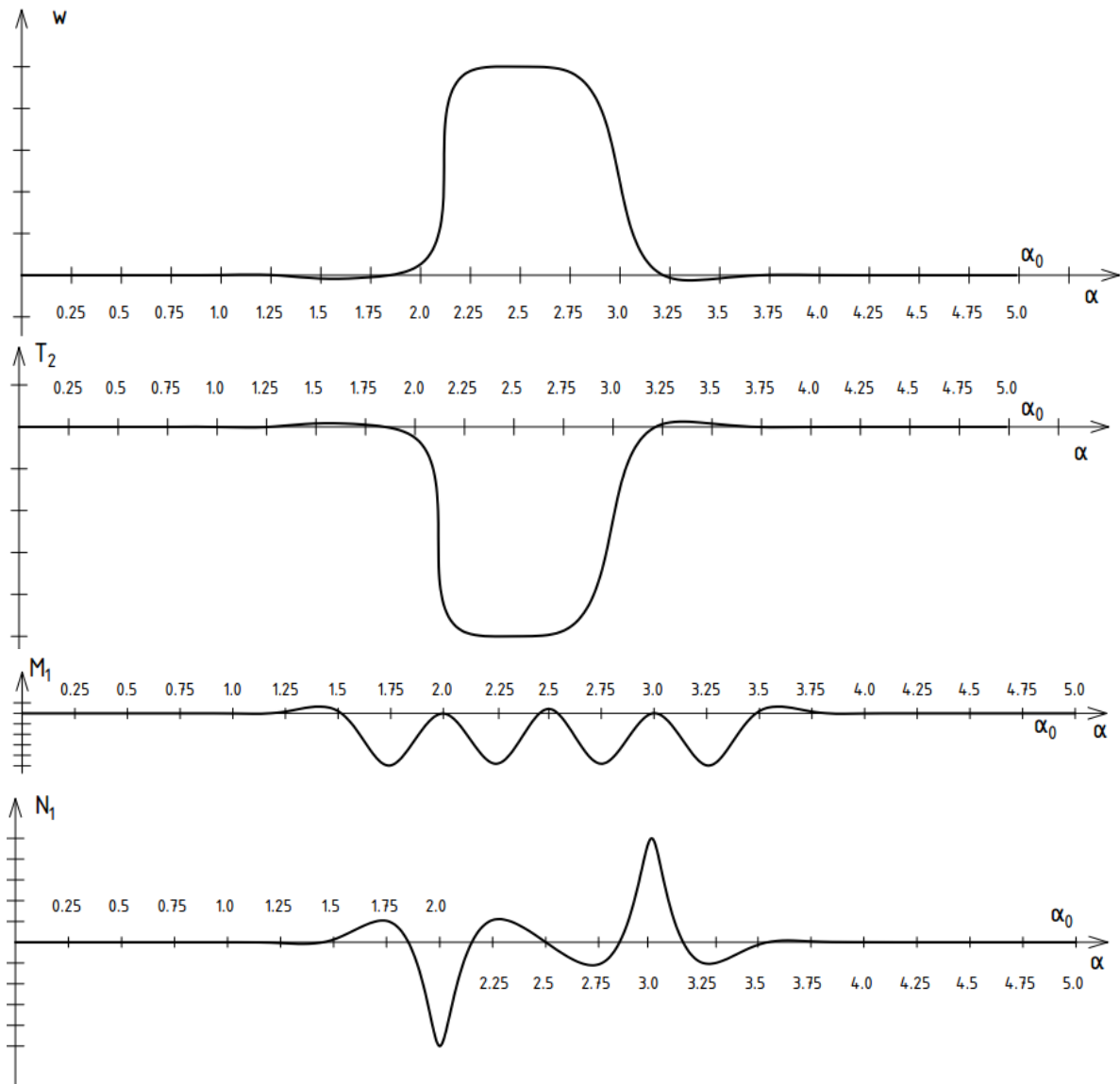
$$d_4 = \frac{sh \omega \alpha_0}{\cos \omega \alpha_0 + ch \omega \alpha_0};$$

$$X_1 = \cos \omega \alpha \ ch \omega \alpha;$$

$$X_3 = \cos \omega \alpha \ sh \omega \alpha;$$

$$X_2 = \sin \omega \alpha \ ch \omega \alpha;$$

$$X_4 = \sin \omega \alpha \ sh \omega \alpha.$$



**Рисунок 2.** Графики для радиального перемещения ( $w$ ), усилий ( $T_2, N_1$ ) и моментов ( $M_1$ ) при действии на цилиндрическую оболочку нагрузки по закону (1) (рисунок авторов)

**Figure 2.** Graphs for radial displacement ( $w$ ), forces ( $T_2, N_1$ ) and moments ( $M_1$ ) when the cylindrical shell is subjected to the load according to the law (1) (authors' drawing)

Выражения для усилий и моментов в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned}
 T_2(\alpha) &= -qR(1 - X_1 + d_3X_2 + d_4X_3); \\
 M_1(\alpha) &= -qR^2 \frac{1}{2\omega^2} (X_4 + d_3X_3 - d_4X_2); \\
 M_2(\alpha) &= -qR^2 \frac{\nu_2}{2\omega^2} (X_4 + d_3X_3 - d_4X_2); \\
 N_1(\alpha) &= qR \frac{1}{2\omega} [X_2 + X_3 + d_3(X_1 - X_4) - d_4(X_1 + X_4)].
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Если подставим в выражения (16) и (17)  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_0$ , то получим выражения для перемещения, усилий и моментов в середине длины оболочки:

$$\begin{aligned}
 w\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= \frac{qR^2}{E_2h} \left( 1 - \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega\alpha_0\operatorname{ch}\frac{1}{2}\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + \operatorname{ch}\omega\alpha_0} \right); \\
 T_2\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= -qR \left( 1 - \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega\alpha_0\operatorname{ch}\frac{1}{2}\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + \operatorname{ch}\omega\alpha_0} \right); \\
 M_1\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= \frac{qR^2}{\omega^2} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\omega\alpha_0\operatorname{sh}\frac{1}{2}\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + \operatorname{ch}\omega\alpha_0}; \\
 N_1\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

При больших значениях аргументов  $\omega\alpha_0 \geq 7$  переходим от гиперболических функций к показательным функциям.

$$\begin{aligned}
 w(\alpha) &= \frac{qR^2}{E_2h} \left\{ 1 + e^{-2\omega\alpha_0} + 2e^{-\omega\alpha_0} \cos\omega\alpha_0 - [e^{-\omega\alpha} + e^{\omega(\alpha-2\alpha_0)}] \cos\omega\alpha - \right. \\
 &\quad \left. - [e^{\omega(\alpha-\alpha_0)} + e^{-\omega(\alpha+\alpha_0)}] \cos\omega(\alpha-\alpha_0) \right\}; \\
 T_2(\alpha) &= -qR \left\{ 1 + e^{-2\omega\alpha_0} + 2e^{-\omega\alpha_0} \cos\omega\alpha_0 - [e^{-\omega\alpha} + e^{\omega(\alpha-2\alpha_0)}] \cos\omega\alpha - \right. \\
 &\quad \left. - [e^{\omega(\alpha-\alpha_0)} + e^{-\omega(\alpha+\alpha_0)}] \cos\omega(\alpha-\alpha_0) \right\}; \\
 M_1(\alpha) &= -qR^2 \frac{1}{2\omega^2} \left[ e^{\omega(\alpha-\alpha_0)} \sin\omega(\alpha-\alpha_0) - e^{-\omega(\alpha+\alpha_0)} \sin\omega(\alpha-\alpha_0) + \right. \\
 &\quad \left. + e^{\omega(\alpha-2\alpha_0)} \sin\omega\alpha - e^{-\omega\alpha} \sin\omega\alpha \right]; \\
 N_1(\alpha) &= qR \frac{1}{2\omega} \left\{ [\sin\omega(\alpha-\alpha_0) + \cos\omega(\alpha-\alpha_0)] e^{\omega(\alpha-\alpha_0)} + \right. \\
 &\quad \left. + [\sin\omega(\alpha-\alpha_0) - \cos\omega(\alpha-\alpha_0)] e^{-\omega(\alpha+\alpha_0)} + \right. \\
 &\quad \left. + (\sin\omega\alpha + \cos\omega\alpha) e^{\omega(\alpha-2\alpha_0)} + (\sin\omega\alpha - \cos\omega\alpha) e^{-\omega\alpha} \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В таблице 2 и на рисунок 3 приведены результаты расчета ортотропной оболочки с геометрическими параметрами (14) и упругими характеристиками (15) в случае действия нагрузки по всей поверхности оболочки.

Таблица 2 / Table 2

Результаты расчета при действии  
нагрузки по всей поверхности ортотропной оболочки

Calculation results when the load  
is applied over the entire surface of the orthotropic shell

$\alpha$	$w / \frac{qR^2}{E_2 h}$	$T_2 / qR$	$M_1 / qR^2 \frac{1}{2\omega^2}$	$N_1 / qR \frac{1}{2\omega}$
0	0	0	0	-1
0,25	1.02122717	-1.02122717	0.18411706	0.20534423
0,5	1.033448	-1.033448	-0.00782	0.025632
0,75	0.997851	-0.997851	-0.00599	-0.00814
1	0.998942	-0.998942	0.000523	-0.00053
1,25	1.000119	-1.000119	0.000184	0.000302
1,5	1.000031	-1.000031	-2.6E-05	5.53E-06
1,75	0.999995	-0.999995	-5.2E-06	-1.1E-05
2	0.999999	-0.999999	1.11E-06	2.6E-07
2,25	1	-1	1.29E-07	3.65E-07
2,5	1	-1	-8.7E-08	0
2,75	1	-1	1.29E-07	-3.6E-07
3	0.9999992	-0.9999992	1.108E-06	-2.6E-07
3,25	0.9999946	-0.9999946	-5.21E-06	1.062E-05
3,5	1.000031	-1.000031	-2.6E-05	-5.5E-06
3,75	1.000119	-1.000119	0.000184	-0.0003
4	0.9989423	-0.9989423	0.0005229	0.0005348
4,25	0.99785082	-0.99785082	-0.0059925	0.0081417
4,5	1.033448499	-1.033448499	-0.007816567	-0.025631931
4,75	1.021227168	-1.021227168	0.184117059	-0.20534423
5	0	0	0	1

Составлено авторами / Compiled by the authors

Используя выражения (9) и (10), можно получить решение для ортотропной замкнутой цилиндрической оболочки в случае действия сосредоточенной по длине оболочки нагрузки  $p$ , равномерно распределенной по круговому сечению (рис. 4).

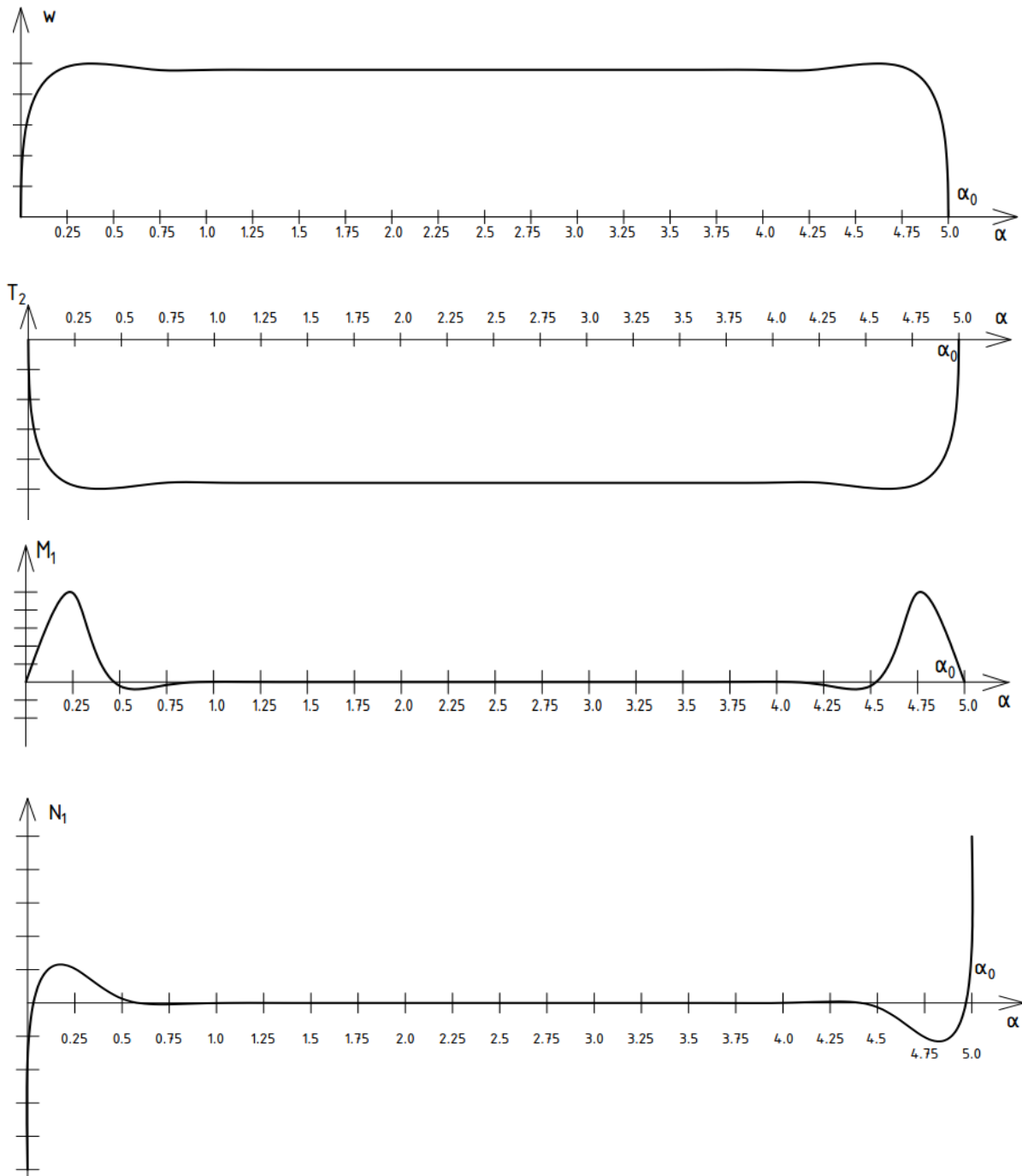
Для получения решения при таком нагружении цилиндрической оболочки будем считать, что расстояние  $R\alpha_1$  (рис. 1) бесконечно уменьшается, а  $\alpha$  увеличивается так, что произведение  $qR\alpha_1$  становится конечным и равным  $p$  [19]. В пределе получим из решения (9) решение для ортотропной оболочки при действии нагрузки  $p$  в соответствии с рисунком 4:

$$w(\alpha) = \frac{\omega p R}{E_2 h} [(Y_2 - Y_3)\eta(\alpha - \tau) - (B_1 + B_4)X_2 + (B_1 - B_4)X_3 + d_5(X_2 + X_3) + d_6(X_2 - X_3)], \quad (20)$$

где:

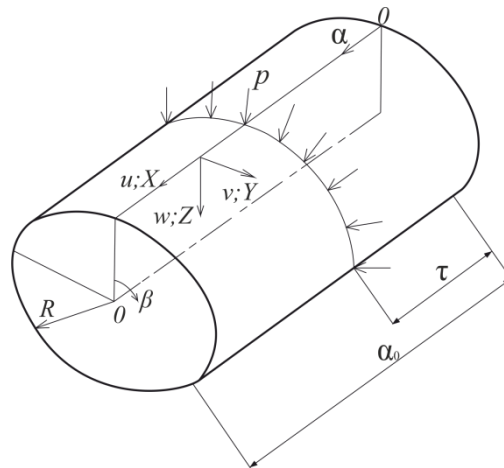
$$d_5 = (B_3 \sin 2\omega\alpha_0 - B_2 \operatorname{sh} 2\omega\alpha_0) (\cos 2\omega\alpha_0 - \operatorname{ch} 2\omega\alpha_0)^{-1};$$

$$d_6 = - (B_2 \sin 2\omega\alpha_0 + B_3 \operatorname{sh} 2\omega\alpha_0) (\cos 2\omega\alpha_0 - \operatorname{ch} 2\omega\alpha_0)^{-1}.$$



**Рисунок 3.** Графики для радиального перемещения ( $w$ ),  
усилий ( $T_2, N_1$ ) и моментов ( $M_1$ ) при действии нагрузки по всей  
поверхности оболочки (рисунок авторов)

**Figure 3.** Graphs for radial displacement ( $w$ ), forces ( $T_2, N_1$ ) and moments ( $M_1$ )  
when the load is applied over the whole surface of the shell (figure by the authors)



**Рисунок 4.** Схема ортотропной замкнутой цилиндрической оболочки в случае действия сосредоточенной по длине оболочки нагрузки  $p$ , равномерно распределенной по круговому сечению (рисунок авторов)

**Figure 4.** Schematic diagram of an orthotropic closed cylindrical shell in the case of the action of a load  $p$  concentrated along the length of the shell and uniformly distributed along the circular cross-section (figure by the authors)

Выражения для усилий и моментов в данном случае нагружения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_2(\alpha) &= -\frac{\Omega_1}{\omega_1} \frac{w}{R} = -\omega p \left[ (Y_2 - Y_3) \eta(\alpha - \tau) - (B_1 + B_4) X_2 + (B_1 - B_4) X_3 + \right. \\
 &\quad \left. + d_5 (X_2 + X_3) + d_6 (X_2 - X_3) \right]; \\
 M_1(\alpha) &= -C_{11} \frac{h^2}{12 R^2} \frac{d^2 w}{d \alpha^2} = -\frac{p R}{2 \omega} \left[ (Y_2 + Y_3) \eta(\alpha - \tau) - (B_1 + B_4) X_3 - \right. \\
 &\quad \left. - (B_1 - B_4) X_2 - d_5 (X_2 - X_3) + d_6 (X_2 + X_3) \right]; \\
 M_2(\alpha) &= -C_{12} \frac{h^2}{12 R^2} \frac{d^2 w}{d \alpha^2} = -p R \frac{V_2}{2 \omega} \left[ (Y_2 + Y_3) \eta(\alpha - \tau) - (B_1 + B_4) X_3 - \right. \\
 &\quad \left. - (B_1 - B_4) X_2 - d_5 (X_2 - X_3) + d_6 (X_2 + X_3) \right]; \\
 N_1(\alpha) &= C_{11} \frac{h^2}{12 R^3} \frac{d^3 w}{d \alpha^3} = p \left[ Y_1 \eta(\alpha - \tau) - B_1 X_1 + B_4 X_4 - d_5 X_4 + d_6 X_1 \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Запишем выражения для перемещения, усилия и момента при действии нагрузки  $p$  по середине длины оболочки, то есть, когда  $\tau = \frac{1}{2} \alpha_0$

при  $\alpha = \frac{1}{2} \alpha_0$  :

$$\begin{aligned} w\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= \frac{\omega pR}{2Eh} \cdot \frac{sh\omega\alpha_0 - \sin\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + ch\omega\alpha_0} ; \\ T_2\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= -\frac{\omega p}{2} \cdot \frac{sh\omega\alpha_0 - \sin\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + ch\omega\alpha_0} ; \\ M_1\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) &= \frac{pR}{4\omega} \cdot \frac{\sin\omega\alpha_0 + sh\omega\alpha_0}{\cos\omega\alpha_0 + ch\omega\alpha_0} . \end{aligned} \quad (22)$$

При больших значениях  $\omega\alpha_0$  при  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_0$  имеем:

$$w\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) = \frac{\omega pR}{2Eh}; \quad N_2\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) = -\frac{\omega p}{2}; \quad M_1\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) = \frac{pR}{4\omega} . \quad (23)$$

При больших значениях аргументов  $2\omega\alpha_0 \geq 10$  переходим от гиперболических функций к показательным функциям.

На участке  $0 \leq \alpha < \tau$ :

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \frac{\omega pR}{E_2 h} \left[ -(B_1 + B_4)X_2 + (B_1 - B_4)X_3 + d_5(X_2 - X_3) + d_6(X_2 - X_3) \right] \approx \\ &\approx \frac{\omega pR}{2E_2 h} \left[ e^{\omega\tau_1} (\cos\omega\tau_1 - \sin\omega\tau_1) - e^{-\omega\tau_2} (\cos\omega\tau_2 + \sin\omega\tau_2) - e^{\omega\tau_5} (\cos\omega\tau_6 - \sin\omega\tau_6) + \right. \\ &+ e^{-\omega\tau_6} (\cos\omega\tau_6 + \sin\omega\tau_6) - e^{\omega\tau_7} (\cos\omega\tau_7 - \sin\omega\tau_7) + e^{-\omega\tau_8} (\cos\omega\tau_7 + \sin\omega\tau_7) - \\ &\left. - e^{-\omega\tau_{13}} (\cos\omega\tau_1 + \sin\omega\tau_1) + e^{\omega\tau_{14}} (\cos\omega\tau_2 - \sin\omega\tau_2) \right]; \\ T_2(\alpha) &= -\frac{1}{2}\omega p \left[ e^{\omega\tau_1} (\cos\omega\tau_1 - \sin\omega\tau_1) - e^{-\omega\tau_2} (\cos\omega\tau_2 + \sin\omega\tau_2) - e^{\omega\tau_5} (\cos\omega\tau_6 - \sin\omega\tau_6) + \right. \\ &+ e^{-\omega\tau_6} (\cos\omega\tau_6 + \sin\omega\tau_6) - e^{\omega\tau_7} (\cos\omega\tau_7 - \sin\omega\tau_7) + e^{-\omega\tau_8} (\cos\omega\tau_7 + \sin\omega\tau_7) - \\ &\left. - e^{-\omega\tau_{13}} (\cos\omega\tau_1 + \sin\omega\tau_1) + e^{\omega\tau_{14}} (\cos\omega\tau_2 - \sin\omega\tau_2) \right]; \\ M_1(\alpha) &= -\frac{pR}{2\omega} \left[ -(B_1 + B_4)X_3 - (B_1 - B_4)X_2 - d_5(X_2 - X_3) + d_6(X_2 + X_3) \right] \approx \\ &\approx -\frac{pR}{4\omega} \left[ -e^{\omega\tau_1} (\cos\omega\tau_1 + \sin\omega\tau_1) + e^{-\omega\tau_2} (\cos\omega\tau_2 - \sin\omega\tau_2) - \right. \\ &- e^{-\omega\tau_6} (\cos\omega\tau_6 - \sin\omega\tau_6) + e^{\omega\tau_5} (\cos\omega\tau_6 + \sin\omega\tau_6) + e^{\omega\tau_7} (\cos\omega\tau_7 + \sin\omega\tau_7) - \\ &\left. - e^{-\omega\tau_8} (\cos\omega\tau_7 - \sin\omega\tau_7) + e^{-\omega\tau_{13}} (\cos\omega\tau_1 - \sin\omega\tau_1) - e^{\omega\tau_{14}} (\cos\omega\tau_2 + \sin\omega\tau_2) \right]; \\ N_1(\alpha) &= p \left( -B_1X_1 + B_4X_4 - d_5X_4 + d_6X_1 \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} p \left[ -e^{\omega\tau_1} \cos\omega\tau_1 - e^{-\omega\tau_2} \cos\omega\tau_2 + e^{-\omega\tau_6} \cos\omega\tau_6 + e^{\omega\tau_5} \cos\omega\tau_6 + e^{\omega\tau_7} \cos\omega\tau_7 + \right. \\ &\left. + e^{-\omega\tau_8} \cos\omega\tau_7 - e^{-\omega\tau_{13}} \cos\omega\tau_1 - e^{\omega\tau_{14}} \cos\omega\tau_2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

На участке  $\tau < \alpha \leq \alpha_0$ :

$$\begin{aligned}
 w(\alpha) &= \frac{\omega p R}{E_2 h} [Y_2 - Y_3 - (B_1 + B_4)X_2 + (B_1 - B_4)X_3 + d_5(X_2 + X_3) + d_6(X_2 - X_3)] \approx \\
 &\approx \frac{\omega p R}{2 E_2 h} [e^{-\omega\tau_1} (\cos \omega\tau_1 + \sin \omega\tau_1) - e^{-\omega\tau_2} (\cos \omega\tau_2 + \sin \omega\tau_2) + e^{\omega\tau_5} (\cos \omega\tau_5 - \sin \omega\tau_5) - \\
 &\quad - e^{\omega\tau_{17}} (\cos \omega\tau_1 - \sin \omega\tau_1) + e^{\omega\tau_{14}} (\cos \omega\tau_2 - \sin \omega\tau_2)]; \\
 T_2(\alpha) &= -\frac{1}{2} \omega p [e^{-\omega\tau_1} (\cos \omega\tau_1 + \sin \omega\tau_1) - e^{-\omega\tau_2} (\cos \omega\tau_2 + \sin \omega\tau_2) + e^{\omega\tau_5} (\cos \omega\tau_5 - \sin \omega\tau_5) - \\
 &\quad - e^{\omega\tau_{17}} (\cos \omega\tau_1 - \sin \omega\tau_1) + e^{\omega\tau_{14}} (\cos \omega\tau_2 - \sin \omega\tau_2)]; \\
 M_1(\alpha) &= -\frac{p R}{4 \omega} [-e^{-\omega\tau_1} (\cos \omega\tau_1 - \sin \omega\tau_1) + e^{-\omega\tau_2} (\cos \omega\tau_2 - \sin \omega\tau_2) - \\
 &\quad - e^{\omega\tau_5} (\cos \omega\tau_5 + \sin \omega\tau_5) + e^{-\omega\tau_6} (\cos \omega\tau_5 - \sin \omega\tau_5) + e^{\omega\tau_7} (\cos \omega\tau_7 + \sin \omega\tau_7) - \\
 &\quad - e^{-\omega\tau_8} (\cos \omega\tau_7 - \sin \omega\tau_7) - e^{\omega\tau_{14}} (\cos \omega\tau_2 + \sin \omega\tau_2) + e^{\omega\tau_{17}} (\cos \omega\tau_1 + \sin \omega\tau_1)]; \\
 N_1(\alpha) &= p (Y_1 - B_1 X_1 + B_4 X_4 - d_5 X_4 + d_6 X_1) \approx \\
 &\approx \frac{1}{2} p [e^{-\omega\tau_1} \cos \omega\tau_1 - e^{-\omega\tau_2} \cos \omega\tau_2 - e^{\omega\tau_5} \cos \omega\tau_5 - e^{-\omega\tau_6} \cos \omega\tau_5 + e^{\omega\tau_7} \cos \omega\tau_7 + \\
 &\quad + e^{-\omega\tau_8} \cos \omega\tau_7 - e^{\omega\tau_{14}} \cos \omega\tau_2 + e^{\omega\tau_{17}} \cos \omega\tau_1].
 \end{aligned} \tag{25}$$

В таблице 3 и на рисунке 5 приведены результаты расчета ортотропной оболочки с геометрическими параметрами (14) и упругими характеристиками (15) при действии нагрузки, сосредоточенной по длине и равномерно распределенной по круговому сечению.

Если на оболочку действует нагрузка, сосредоточенная по длине оболочки и равномерно распределенная по круговому сечению, то необходимо вычислять значения  $N_1$  для сечения, расположенного бесконечно близко слева и справа от линии действия нагрузки.

Используя выражения (20) и (21), можно получить решение для цилиндрической оболочки, на которую действует изгибающий момент  $M_0$ , сосредоточенный в каком-либо сечении по длине оболочки и равномерно распределенный в кольцевом направлении (рис. 6) [19].

Для этого сначала составляем выражение для  $w(\alpha)$  при действии на оболочку равномерно распределенной по круговому сечению нагрузки  $p$  в двух сечениях по длине оболочки (рис. 7). Затем считаем, что расстояние  $dR$  бесконечно уменьшается и в то же время  $p$  увеличивается так, что произведение  $pdR$  становится конечным и равным  $M_0$ . В пределе получаем решение для оболочки, нагруженной изгибающим моментом  $M_0$ , сосредоточенным в каком-либо сечении по длине оболочки и равномерно распределенным по кольцу.

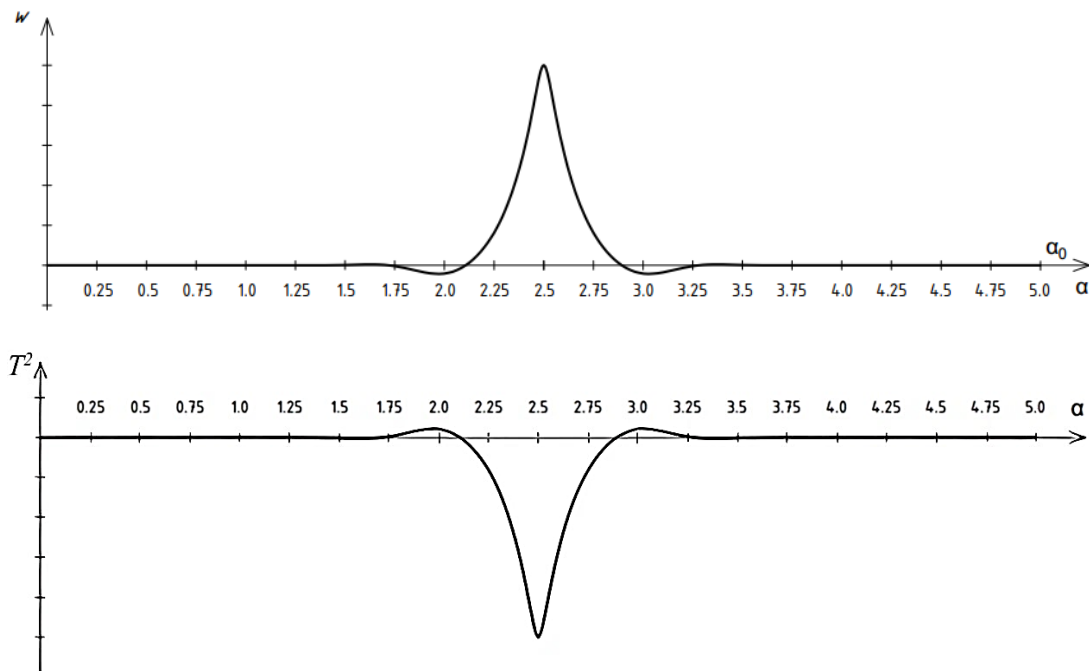
Таблица 3 / Table 3

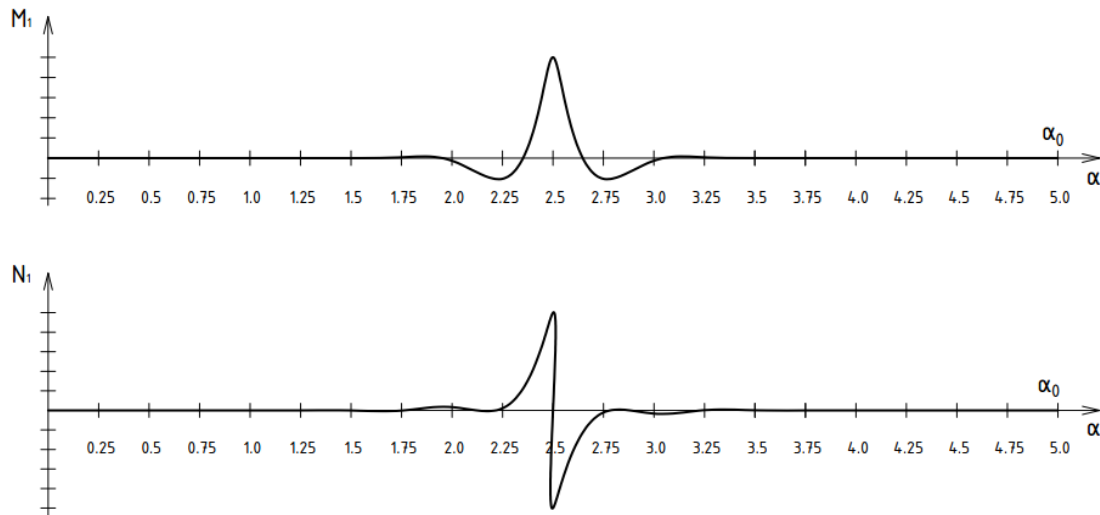
Результаты расчета ортотропной оболочки при действии нагрузки, сосредоточенной по длине и равномерно распределенной по круговому сечению

Calculation results of an orthotropic shell under the action of a load concentrated along the length of the shell and uniformly distributed along the circular cross-section

$\alpha$	$w / \frac{\omega p R}{E_2 h}$	$T_2 / \omega p$	$M_1 / \frac{p R}{2 \omega}$	$N_1 / p$
0	0	0	0	1.96E-08
0,25	-4.7604E-08	-4.7604E-08	-1.8E-07	1.07E-07
0,5	9.75E-07	9.75E-07	-1.3E-07	-4.2E-07
0,75	9.63E-08	9.63E-08	5.31E-06	-2.7E-06
1	-2.9E-05	-2.9E-05	-2.8E-06	1.56E-05
1,25	3.25E-05	3.25E-05	-0.00015	5.94E-05
1,5	0.00079	0.00079	0.000267	-0.00053
1,75	-0.00192	-0.00192	0.004071	-0.00107
2	-0.02063	-0.02063	-0.01282	0.016724
2,25	0.081445	0.081445	-0.10267	0.010614
2,5	0.5	0.5	0.5	0.5/-0.5
2,75	0.081445	0.081445	-0.10267	-0.01061
3	-0.02063	-0.02063	-0.01282	-0.01672
3,25	-0.00192	-0.00192	0.004071	0.001075
3,5	0.00079	0.00079	0.000267	0.000529
3,75	3.25E-05	3.25E-05	-0.00015	-5.9E-05
4	-2.9E-05	-2.9E-05	-2.8E-06	-1.6E-05
4,25	9.63E-08	9.63E-08	5.31E-06	2.7E-06
4,5	9.75E-07	9.75E-07	-1.3E-07	4.23E-07
4,75	-4.7604E-08	-4.7604E-08	-1.8245E-07	-1.0658E-07
5	0	0	0	-2E-08

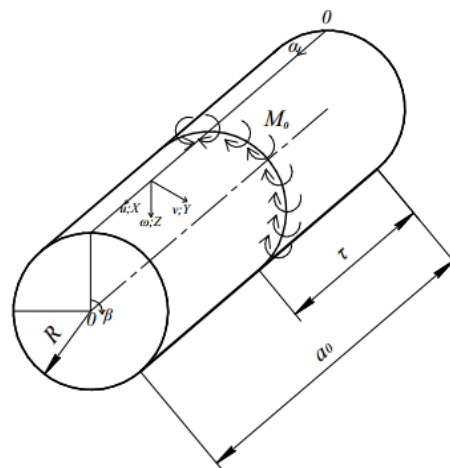
Составлено авторами / Compiled by the authors





**Рисунок 5.** Графики для радиального перемещения ( $w$ ), усилий ( $T_2, N_1$ ) и моментов ( $M_1$ ) при действии нагрузки, сосредоточенной по длине и равномерно распределенной по круговому сечению по всей поверхности ортотропной оболочки (рисунок авторов)

**Figure 5.** Graphs for radial displacement ( $w$ ), forces ( $T_2, N_1$ ) and moments ( $M_1$ ) under the action of a load concentrated along the length and uniformly distributed along the circular section over the entire surface of the orthotropic shell (figure by the authors)



**Рисунок 6.** Схема цилиндрической оболочки, на которую действует изгибающий момент  $M_0$  (рисунок авторов)

**Figure 6.** Schematic of a cylindrical shell subjected to a bending moment  $M_0$  (figure by the authors)

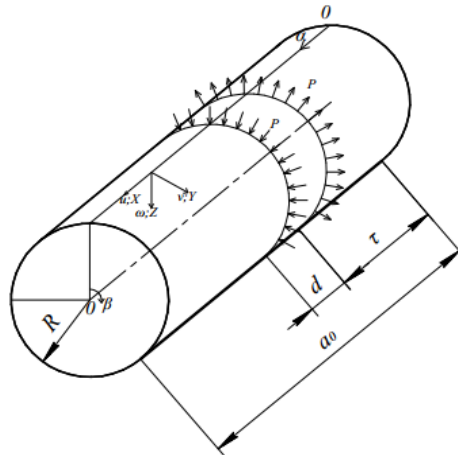
Не приводя промежуточных операций, запишем окончательное решение:

$$w(\alpha) = -\frac{2\omega^2 M_0}{E_2 h} \left[ Y_4 \eta(\alpha - \tau) + B_3 X_2 + B_2 X_3 + d_7 X_2 - d_8 X_3 \right], \quad (26)$$

где:

$$d_7 = (B_4 \sin 2\omega\alpha_0 + B_1 sh 2\omega\alpha_0)(\cos 2\omega\alpha_0 - ch 2\omega\alpha_0)^{-1};$$

$$d_8 = (B_1 \sin 2\omega\alpha_0 - B_4 sh 2\omega\alpha_0)(\cos 2\omega\alpha_0 - ch 2\omega\alpha_0)^{-1} .$$



**Рисунок 7.** Схема цилиндрической оболочки при действии равномерно распределенной по круговому сечению нагрузки  $p$  в двух сечениях по длине оболочки (рисунок авторов)

**Figure 7.** Schematic of a cylindrical shell under the action of a load  $p$  uniformly distributed over a circular cross-section in two cross-sections along the length of the shell (figure by the authors)

Выражения для усилий и момента в данном случае нагружения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_2(\alpha) &= \frac{2\omega^2 M_0}{R} [Y_4 \eta(\alpha - \tau) + B_3 X_2 + B_2 X_3 + d_7 X_2 - d_8 X_3] ; \\
 M_1(\alpha) &= -M_0 \frac{E_2}{E_1} [Y_1 \eta(\alpha - \tau) + B_3 X_3 - B_2 X_2 + d_7 X_3 + d_8 X_2] ; \\
 M_2(\alpha) &= -M_0 \nu_1 \frac{E_2}{E_1} [Y_1 \eta(\alpha - \tau) + B_3 X_3 - B_2 X_2 + d_7 X_3 + d_8 X_2] ; \\
 N_1(\alpha) &= \frac{\omega M_0}{R} [ -(Y_2 - Y_3) \eta(\alpha - \tau) + B_3 (X_1 - X_4) - B_2 (X_1 + X_4) + \\
 &\quad + d_7 (X_1 - X_4) + d_8 (X_1 + X_4) ] .
 \end{aligned} \tag{27}$$

Положив в (26)  $\tau = 0$  получим решение для случая, когда изгибающий момент  $M_0$  действует в сечении  $\alpha = 0$  (рис. 8):

$$\begin{aligned}
 w(\alpha) &= -\frac{2\omega^2 M_0}{E_2 h} (X_4 + d_9 X_2 - d_{10} X_3) ; \\
 T_2(\alpha) &= \frac{2\omega^2 M_0}{R} (X_4 + d_9 X_2 - d_{10} X_3) ; \\
 M_1(\alpha) &= M_0 \frac{E_2}{E_1} (X_1 + d_9 X_3 + d_{10} X_2) ; \\
 M_2(\alpha) &= M_0 \nu_1 \frac{E_2}{E_1} (X_1 + d_9 X_3 + d_{10} X_2) ; \\
 N_1(\alpha) &= -\frac{\omega M_0}{R} [ -X_2 + X_3 + d_9 (X_1 - X_4) + d_{10} (X_1 + X_4) ] ,
 \end{aligned} \tag{28}$$

где:

$$d_9 = \frac{sh2\omega\alpha_0}{\cos 2\omega\alpha_0 - ch2\omega\alpha_0};$$

$$d_{10} = \frac{\sin 2\omega\alpha_0}{\cos 2\omega\alpha_0 - ch2\omega\alpha_0}.$$

Положив в (26)  $\tau = \alpha_0$ , получим решение для случая, когда изгибающий момент  $M_0$  действует в сечении  $\alpha = \alpha_0$  (рис. 9):

$$w(\alpha) = -\frac{2\omega^2 M_0}{E_2 h} (A_3 X_2 + A_2 X_3 + d_{11} X_2 - d_{12} X_3);$$

$$T_2(\alpha) = \frac{2\omega^2 M_0}{R} (A_3 X_2 + A_2 X_3 + d_{11} X_2 - d_{12} X_3);$$

$$M_1(\alpha) = M_0 \frac{E_2}{E_1} (A_3 X_3 - A_2 X_2 + d_{11} X_3 + d_{12} X_2); \quad (29)$$

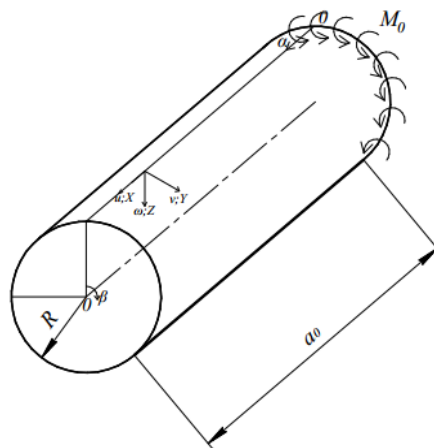
$$M_2(\alpha) = M_0 \nu_1 \frac{E_2}{E_1} (A_3 X_3 - A_2 X_2 + d_{11} X_3 + d_{12} X_2);$$

$$N_1(\alpha) = -\frac{\omega M_0}{R} [A_3(X_1 - X_4) - A_2(X_1 + X_4) + d_{11}(X_1 - X_4) + d_{12}(X_1 + X_4)],$$

где:

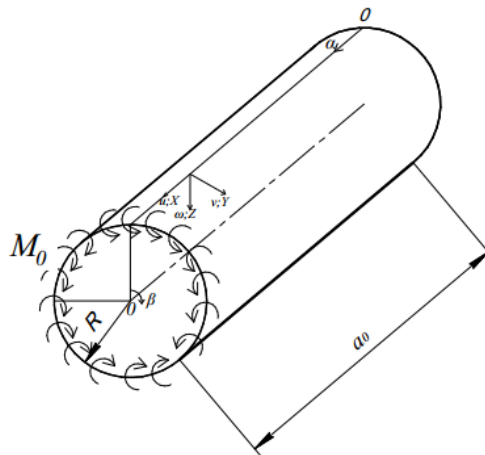
$$d_{11} = (A_4 \sin 2\omega\alpha_0 + A_1 sh2\omega\alpha_0)(\cos 2\omega\alpha_0 - ch2\omega\alpha_0)^{-1};$$

$$d_{12} = (A_1 \sin 2\omega\alpha_0 - A_4 sh2\omega\alpha_0)(\cos 2\omega\alpha_0 - ch2\omega\alpha_0)^{-1}.$$



**Рисунок 8.** Схема цилиндрической оболочки, на которую действует изгибающий момент  $M_0$  в сечении  $\alpha = 0$  (рисунок авторов)

**Figure 8.** Schematic of a cylindrical shell subjected to a bending moment  $M_0$  in a cross-section  $\alpha = 0$  (figure by the authors)



**Рисунок 9.** Схема цилиндрической оболочки, на которую действует изгибающий момент  $M_0$  в сечении  $\alpha = \alpha_0$  (рисунок авторов)

**Figure 9.** Schematic diagram of a cylindrical shell subjected to a bending moment  $M_0$  in a section  $\alpha = \alpha_0$  (figure by the authors)

## Заключение

### Conclusion

Полученные авторами выражения позволяют рассчитать ортотропную замкнутую цилиндрическую оболочку при разных геометрических параметрах оболочки и при разных упругих характеристиках материала оболочки, которая находится под действием внешней осесимметричной нагрузки. Осесимметричная нагрузка может быть разного вида: сосредоточенная осесимметричная нагрузка, действующая в любом сечении по длине оболочки; кольцевая нагрузка, приложенная в любом месте по длине оболочки, участки нагружения при этом могут иметь разные размеры.

Полученные выражения позволяют решать многочисленные задачи оптимального проектирования оболочек. В работе [15] указано, как можно решить задачу, если оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости материала не совпадают с направлениями координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$ .

Положив во всех приведенных выражениях  $E_1 = E_2 = E$  и  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , можно получить решения для изотропной оболочки.

Проделав аналогичные операции, можно получить решения и при других граничных условиях.

Статья содержит новые результаты и будет полезна инженерам — проектировщикам и аспирантам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев, В.В.** Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. — Москва: Машиностроение, 1988. — 272 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001396834> (дата обращения: 20.10.2024).
2. **Цхадая, Н.Д.** Стеклопластиковые трубы повышенной герметичности для нефтегазовой промышленности / Н.Д. Цхадая, Э.З. Ягубов, З.Х. Ягубов // Академический журнал Западной Сибири. — 2013. — Т 9. — № 4. — С. 35. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20162015>. — EDN QZFIRD. (дата обращения: 20.10.2024).
3. **Зорин, В.А.** Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники (Обзор) / В.А. Зорин // Конструкции из композиционных материалов. — 2011. — № 4. — С. 44-59. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17050434>. — EDN OJCZJF. (дата обращения: 20.10.2024).
4. **Бакулин, В.Н.** Применение трехслойных оболочек. Краткий обзор работ по расчету напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами / В.Н. Бакулин // Вопросы оборонной техники. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. — 2023. — № 3. — С. 17–24. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=59690961>. — EDN DPABME. (дата обращения: 20.10.2024).
5. **Бакулин, В.Н.** Эффективная трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек / В.Н. Бакулин. — DOI <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-3-10> // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2024. — № 3. — С. 64–70. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=67916246>. — EDN BPCQJN. (дата обращения: 20.10.2024).
6. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина [и др.]. — DOI <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2022-4-330> // Математическое моделирование и численные методы. — 2022. — № 4. — С. 3–30. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50192669>. — EDN YHMDMA. (дата обращения: 20.10.2024).
7. **Димитриенко, Ю.И.** Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина. — DOI <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2020-4-84110> // Математическое моделирование и численные методы. — 2020. — № 4. — С. 84–110. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46534083>. — EDN POAQGA. (дата обращения: 20.10.2024).
8. **Згода, Ю.Н.** О высокопроизводительной реализации метода продолжения по наилучшему параметру применительно к моделированию тонкостенных оболочек / Ю.Н. Згода, А.А. Семенов. — DOI <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2024-47-1-105-110> // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. — 2024. — № 1. — С. 105–110. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=65580532>. — EDN ARMYRA. (дата обращения: 20.10.2024).
9. **Трещев, А.А.** К оценке влияния воздействия температуры на деформирование круговой цилиндрической оболочки с учетом двух видов анизотропии / А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Д.И. Дорошенко. — DOI [https://doi.org/10.51608/26867818\\_2024\\_1\\_92](https://doi.org/10.51608/26867818_2024_1_92) // Эксперт: теория и практика. — 2024. — № 1. — С. 92–104. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=64032911>. — EDN MSHFGS. (дата обращения: 20.10.2024).
10. **Фирсанов, В.В.** Анализ напряженно-деформированного состояния композиционных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом пьезоэлектрического эффекта / В.В. Фирсанов, Л.Х. Нгуен. — DOI <https://doi.org/10.31857/S0235711921040039> // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2021. — Т 50. — № 4. — С. 312–318. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46226784>. — EDN XWTRLD. (дата обращения: 20.10.2024).
11. **Петров, Д.С.** Анализ устойчивости ортотропной цилиндрической оболочечной конструкции в программном комплексе ANSYS Mechanical APDL / Д.С. Петров, А.А. Семенов. — DOI <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-3-618-627> // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2023. — Т 23. — № 3. — С. 618–627. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54143839>. — EDN IIAIEZ. (дата обращения: 20.10.2024).

12. **Янковский, А.П.** Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек / А.П. Янковский. — DOI <https://doi.org/10.14498/vsgtu1838> // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2021. — Т 25. — № 2. — С. 343–364. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46411030>. — EDN IZRKBY. (дата обращения: 20.10.2024).
13. **Трещев, А.А.** Модель ортотропной цилиндрической оболочки, выполненной из деформационно анизотропного материала и находящейся в термосиловом поле / А.А. Трещев, Ю.А. Завьялова, М. А. Лапшина // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2020 году: Сборник научных трудов РААСН: в 2 томах / Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН). Том 2. / Москва: Издательство АСВ, 2021. — С. 273–282. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46252087>. — EDN KDWEAR. (дата обращения: 20.10.2024).
14. **Рикардс Р.Б.** Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р.Б. Рикардс, Г.А. Тетерс. — Рига: Зинатне, 1974. — 310 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007203614> (дата обращения: 20.10.2024).
15. **Амбарцумян, С.А.** Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — Москва: Наука, 1974. — 446 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007227075> (дата обращения: 20.10.2024).
16. **Бейтмен, Г.** Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Москва: Наука, 1969. — 343 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01006793715> (дата обращения: 20.10.2024).
17. **Власов, В.З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. — Москва; Ленинград: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. — 784 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01005770565> (дата обращения: 20.10.2024).
18. **Смердов, А.А.** Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций / А.А. Смердов, И.А. Буянов, И.В. Чуднов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2012. — № 8. — С. 70–77. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17883978>. — EDN PBJFXB. (дата обращения: 20.10.2024).
19. **Тимошенко, С.П.** Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. — Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1946. — 532 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01005914490> (дата обращения: 20.10.2024).

---

#### Сведения об авторах:

**Сурнин Дмитрий Аркадьевич** — аспирант кафедры «Транспортное строительство», ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия, e-mail: [dasurnin98@mail.ru](mailto:dasurnin98@mail.ru)  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=1262347](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1262347)

**Шагивалеев Камилль Фатыхович** — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительные материалы, конструкции и технологии», ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия, e-mail: [kfshag@yandex.ru](mailto:kfshag@yandex.ru)  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=581294](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=581294)

**Овчинников Илья Игоревич** — доктор технических наук, доцент, доцент кафедры «Транспортное строительство», ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия, доцент базовой кафедры «АО Мостострой-11», ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия, e-mail: [bridgeart@mail.ru](mailto:bridgeart@mail.ru)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-297X>  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=177132](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=177132)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57191523104>

---

Статья получена: 02.11.2024. Принята к публикации: 18.01.2025. Опубликовано онлайн: 01.02.2025.

## REFERENCES

1. Vasil'yev V.V. [Mechanics of composite structures]. Moscow: Mashinostroyeniye; 1988. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001396834> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
2. Tskhadaya N.D., Yagubov E.Z., Yagubov Z.Kh. [Highly hermetic fiberglass pipes for the oil and gas industry]. *Academic Journal of West Siberia*. 2013;9(4): 35. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20162015> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
3. Zorin V.A. Experience of Composite Application in Articles of Aviation, Rocket and Cosmic Technics (Review). *Composite Materials Constructions*. 2011;(4): 44–59. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17050434> (accessed 20th October 2024). (In Russ., abstract in Eng.).
4. Bakulin V.N. [Application of three-layer shells. Brief overview of works on calculation of stress-strain state of three-layer shells with rectangular cutouts in plan]. Defense Technology Issues. *Composite Non-Metallic Materials in Mechanical Engineering*. 2023;(3): 17–24. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=59690961> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
5. Bakulin V.N. Effective Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of Stress–Strain State of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2024;79(3): 102–109. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133024700146>.
6. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E., Bel'kova K.V., Borin D.M. Modeling of Thermal Stresses in Composite Shells Based on Asymptotic Theory. Part 2. Calculation of Cylindrical Shells. *Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2022;(4): 3–30. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2022-4-330>.
7. Dimitrienko YU.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E. Thermal Stress Modeling in Composite Shells Based on Asymptotic Theory. Part 1. General Shell Theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2020;(4): 84–110. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2020-4-84110>.
8. Zgoda Yu.N., Semenov A.A. On The High-Performance Implementation of The Best Parameter Continuation Method for Simulation of Thin-Walled Shells. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*. 2024;(1): 105–110. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2024-47-1-105-110>.
9. Treshchev A.A., Telichko V.G., Doroshenko D.I. To Assess the Influence of Temperature for Deformation of a Circular Cylindrical Shells Considering Two Types of Anisotropy. *Expert: Theory and Practice*. 2024;(1): 92–104. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: [https://doi.org/10.51608/26867818\\_2024\\_1\\_92](https://doi.org/10.51608/26867818_2024_1_92).
10. Firsanov V.V., Nguyen L.H. The Stress State of Composite Cylindrical Shells Based on Refined Theory with Allowance for the Piezoelectric Effect. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2021;(4): 37–44. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618821040038>.
11. Petrov D.S., Semenov A.A. Buckling Analysis of An Orthotropic Cylindrical Shell Structure in The ANSYS Mechanical APDL Software Package. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2023;23(3): 618–627. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-3-618-627>.
12. Yankovskii A.P. A Refined Model of Viscoelastic-Plastic Deformation of Flexible Spatially-Reinforced Cylindrical Shells. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2021;25(2): 343–364. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1838>.
13. Treshchev A., Zavyalova Yu., Lapshina M. Model Orthotropic Cylindrical Shell Made of Anisotropic Deformation of The Material and Being in Thermal and Force Field. [Fundamental, exploratory and applied research of RAASN on scientific support for the development of architecture, urban planning and the construction industry of the Russian Federation in 2020: Collection of scientific papers of RAASN: in 2 volumes / Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS). Volume 2.]. Moscow: ASV; 2021. p. 273–282. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46252087> (accessed 20th October 2024). (In Russ., abstract in Eng.).

14. Rikards R.B., Teters G.A. [Stability of composite shells]. Riga: Zinatne; 1974. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007203614> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
  15. Ambartsumyan S.A. [General theory of anisotropic shells]. Moscow: Nauka; 1974. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007227075> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
  16. Beytmen G., Erdeyi A. [Tables of integral transformations. V. 1. Fourier, Laplace, Mellin transformations]. Moscow: Nauka; 1969. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01006793715> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
  17. Vlasov V.Z. [General theory of shells and its applications in engineering]. Moscow; Leningrad: State publishing house of technical and theoretical literature; 1949. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01005770565> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
  18. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. Analysis of Optimal Combinations of Requirements to Developed CFRP for Large Space-Rocket Designs. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2012;(8): 70–77. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17883978> (accessed 20th October 2024). (In Russ., abstract in Eng.).
  19. Timoshenko S.P. [Stability of elastic systems]. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat; 1946. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01005914490> (accessed 20th October 2024). (In Russ.).
- 

#### Information about the authors:

**Dmitry A. Surnin** — Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia,  
e-mail: [dasurnin98@mail.ru](mailto:dasurnin98@mail.ru)  
RSCI: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=1262347](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1262347)

**Kamil F. Shagivaleev** — Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia,  
e-mail: [kfshag@yandex.ru](mailto:kfshag@yandex.ru)  
RSCI: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=581294](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=581294)

**Илья И. Овчинников** — Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia, e-mail: [bridgeart@mail.ru](mailto:bridgeart@mail.ru)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-297X>  
RSCI: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=177132](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=177132)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57191523104>

---

Submitted: 2nd November 2024. Revised: 18th January 2025. Published online: 1st February 2025.