

Интернет-журнал «Транспортные сооружения» / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today>

2022, №3, Том 9 / 2022, N 3, Vol. 9 <https://t-s.today/issue-3-2022.html>

URL: <https://t-s.today/PDF/04SATS322.pdf>

DOI: 10.15862/04SATS322 (<https://doi.org/10.15862/04SATS322>)

Анализ поведения пролетных конструкций с трещинами при вибрациях

^{1,2}Локтев А.А., ¹Баракат А.

¹ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский

Московский государственный строительный университет», Москва, Россия

²ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)», Москва, Россия

Автор, ответственный за переписку: Баракат Ахмад, e-mail: ahmadbarakat9992@gmail.com

Аннотация. Введение: Важной инженерной задачей является оценка состояния пролетных конструкций при их эксплуатации в различных условиях и разработка методики не только определения текущего состояния сооружения и отдельных его элементов, но и прогнозирование этапов жизненного цикла. Данная работа посвящена исследованию влияния месторасположения и размеров трещины, расположенной в растянутой зоне поперечного сечения балки, на значение частоты собственных колебаний главной балки пролетного строения. В статье предлагается метод определения месторасположения и параметров раскрытия трещины в растянутой зоне шарнирно опертой балки, представляющей собой основу пролетной конструкции, посредством анализа нескольких частот колебаний.

Методы: Балка мостового перехода моделируется с помощью теории изгиба балок типа

Эйлера-Бернулли. Моделирование трещины проводилось с помощью функции гибкости с учетом местоположения и длины трещины. Математическое выражение сформулировано для определения месторасположения и длины открытой трещины в растянутой зоне шарнирно опертой балки моста. Программа MATLAB использовалась для численных исследований и имитационного моделирования задачи определения параметров трещины.

Результаты: Получены значения собственных частот балки моста с трещиной в разных местах по длине пролета и различной длины трещины в растянутой зоне поперечного сечения. Построены соотношения между относительной длиной трещины и относительной основной частотой балки с трещиной для разных координат ее расположения и

также соотношение между относительным месторасположением и относительной основной частотой балки с трещиной для разных значений длины трещины. Указанные приведенные величины предлагается использовать в качестве критериальных параметров для оценки состояния и возможных сценариев дальнейшей эксплуатации балочного пролетного строения.

Обсуждение: Полученные результаты показывают, что с увеличением относительной длины и относительной координаты места возникновения трещины собственная частота уменьшается. По результатам исследования сформулирован вывод о том, что наименьшего внимания заслуживают трещины в растянутой зоне шарнирной балки с относительной длиной трещины и относительным месторасположением менее чем 0,1. С другой стороны, необходимо проводить исследование для оценки состояния поврежденной балки моста с относительным месторасположением трещины более чем 0,1 и относительной длиной трещины менее чем 0,3 и после проведенного анализа следует принимать решение о возможных режимах дальнейшей эксплуатации искусственного сооружения. Для пролетных конструкций, балки которых имеют трещины с относительным месторасположением трещины более чем 0,1 и относительной длиной трещины более чем 0,3 требуется подробное исследование и обследование конструкции, с выработкой рекомендаций по требуемым ремонтным работам.

Ключевые слова: пролетные конструкции; главная балка; трещина; длина и местоположение трещины; обратная задача; собственная частота

Behavior analysis of span structures with cracks during vibrations

^{1,2}Aleksey A. Loktev, ¹Ahmad Barakat

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

²Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

Corresponding author: Ahmad Barakat, e-mail: ahmadbarakat9992@gmail.com

Abstract. Introduction: An important engineering task is to assess the state of span structures during their operation in various conditions and develop a methodology not only for determining the current state of the structure and its individual elements but also for predicting life cycle stages. This work is dedicated to the study of the influence of the location and crack size located in the tension region of the beam cross-section on the value of the natural oscillations frequency of the main beam of the superstructure. The article proposes a method for determining the location and parameters of crack opening in the tension region of a pin-ended beam, which is the span structure base, by analyzing several vibration frequencies.

Methods: The bridge crossing beam is modeled using the Euler-Bernoulli-type flexural theory. Crack modeling was carried out using the flexibility function, with the account of the location and length of the crack. A mathematical expression is formulated to determine the location and length of an open crack in the tension region of a pin-ended beam. The MATLAB program was used for numerical studies and simulation modeling of the problem of determining the crack parameters.

Results: Values of the bridge girder's natural resonance frequency with a crack in different places along the span and different lengths of the crack in the tension region of the cross-section were obtained.

The relationship between the relative crack length and the relative fundamental beam frequency with a crack for different coordinates of its location and also the relationship between the relative location and the relative fundamental beam frequency with a crack for different crack length values are constructed. These given values are proposed to be used as criterion parameters for assessing the state and possible scenarios for the further operation of the beam span.

Discussion: The results obtained show that with an increase in the relative length and relative coordinate of the crack initiation site, the natural frequency decreases. Based on the study results, the conclusion was formulated that cracks in the hinged beam tension region with a relative crack length and a relative location of less than 0.1 deserve the least attention. On the other hand, it is necessary to conduct a study to assess the state of a damaged bridge beam with a relative crack location of more than 0.1 and a relative crack length of less than 0.3, and after the analysis, a decision should be made on the possible modes of further operation of the engineering structures. For span structures whose beams have cracks with a relative crack location of more than 0.1 and a relative crack length of more than 0.3, a detailed study and examination of a structure are required, with the development of recommendations for the required repair work.

Keywords: span structures; main beam; crack; crack length and location; inverse problem; natural frequency

Данная статья доступна по лицензии Creative Commons “Attribution” («Атрибуция») 4.0 Всемирная

This article is available under the Creative Commons “Attribution” 4.0 Global License



Введение

Introduction

Важной задачей инженерных работ по содержанию мостовых переходов в надлежащем состоянии является диагностика и оцениванием состояния пролетных конструкций в течении всего жизненного цикла. Пролетные конструкции должны соответствовать нормативным требованиям, среди которых можно выделить долговечность, устойчивость, безопасность работы и способность удовлетворять потребности пользователей в течение срока их эксплуатации [1–3]. Решение задач по компетентной оценке состояния сооружения требует постоянного мониторинга для обнаружения возможных повреждений (например, трещин), это позволяет оценить их состояние в текущих условиях, а также составить прогноз их будущей эксплуатации и сформировать блок первичной информации для технического обслуживания, чтобы проверить их целостность и соответствие применимым нормам. Трещины могут возникать в результате случайных механических повреждений, развития внутренних дефектов, температурных перепадов и т. д. Другими причинами появления трещин являются эрозионно-коррозионные явления и усталостная прочность материалов. Трещины на элементе конструкции могут изменить его локальную гибкость. Жесткость конструкции зависит от локализации повреждения и его величины, в результате изменяется собственная частота конструкции. Эффект появления трещины зависит от трех параметров: глубина трещины, направление трещины по отношению к направлению нагрузки и местоположение трещины. Существует три способа приложения силы для обеспечения развития и роста трещины:

1. Трещина типа I — режим раскрытия (растягивающее напряжение, нормальное к плоскости трещины);
2. Трещина типа II — режим скольжения (напряжение сдвига, действующее параллельно плоскости трещины и перпендикулярно плоскости фронта трещины);
3. Трещина типа III — режим разрыва (напряжение сдвига, действующее параллельно плоскости трещины и параллельно плоскости фронта трещины).

Разные режимы трещин показаны на рисунке 1.

Динамическое поведение балок с трещинами изучалось различными аналитическими, численными и экспериментальными методами. В статье *Fu C., Wang Y. и Tong D.* [4].

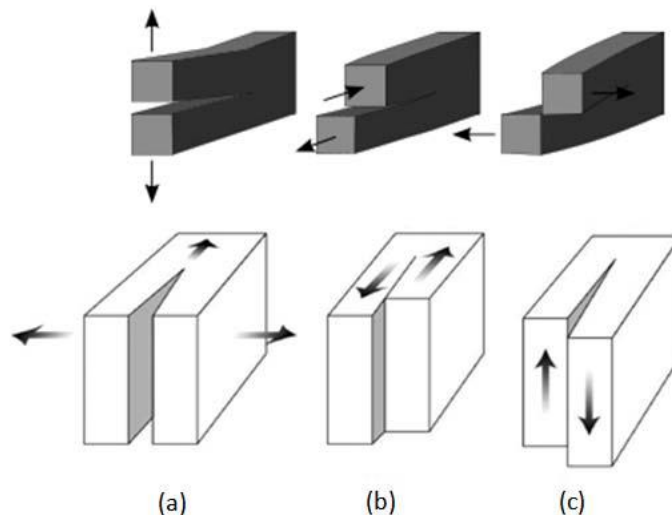


Рисунок 1. Режимы трещин; (a) режим раскрытия,
(b) режим скольжения, (c) режим разрыва

Figure 1. Crack modes; (a) opening mode,
(b) slip mode, (c) break mode

представлен метод оценки жесткости балок с трещинами, основанный на распределении напряжений. Расчетная жесткость используется для прогнозирования перемещений шарнирной балки с трещиной. Результаты показали, что статические и вибрационные смещения прогнозируются точно, что указывает на то, что расчетная жесткость является достаточно точной. В работе *Batihhan A.Ç., Kadioğlu F.S.* [5] трещина с открытым краем представлена в виде пружины вращения, податливость которой обеспечивается механикой разрушения. Авторы наблюдали, что наличие трещины уменьшает величину собственных частот балки. Принцип моделирования трещин как вращающиеся пружины использован также в многих работах [6–9]. В дополнение к вышеперечисленному проблема была решена с использованием метода конечных элементов и экспериментальных испытаний и предложена новая простая формула для расчета жесткости пружины [6]. В их работе, *Khalkar V. и Ramachandran S.* изучили систематически свободные колебания балки Эйлера-Бернулли, содержащей открытые краевые поперечные трещины [10]. Результат показал, что собственная частота консольной балки квадратного сечения не зависит от верхней или нижней поперечной трещины одинаковой конфигурации.

В последние годы проблема влияния трещин на поведение балок при динамических воздействиях привлекает внимание многих исследователей. Для решения проблемы эксплуатации балок с трещинами использовались различные виды аналитических, полуаналитических и численных методов.

Также использованы балок с маленькими пролетами [11–17] или мостов с большими пролетами [18; 19].

Изучение динамического поведения балочных пролетов мостовых переходов дает возможность решить обратную задачу, которая состоит в определении параметров повреждения (местоположения и размеров трещины) при известном количестве измеренных собственных частот. Исходя из этой задачи, можно проверить и найти местоположения и протяженность трещины при периодической и систематической проверке балок пролетного строения. Обнаружение конструктивных повреждений — это область, которая в последние годы вызывает большой интерес в научном сообществе [20–25]. Методы идентификации конструктивных повреждений, основанные на измерениях вибрации, основаны на том факте, что любое изменение жесткости, вызванное повреждением, приводит к изменениям модальных параметров, таких как собственные частоты и формы колебаний. В последнее время были предложены различные методы идентификации повреждений на основе измерений вибрации, такие как методы анализа чувствительности, методы возмущений, методы обновления моделей, методы изменения структурных/модальных параметров, методы, основанные на применении нейронных сетей и т. д. Используя синусоидальный возбудитель колебаний и прецизионный акселерометр, первые 2–4 собственные частоты балки можно измерить [26]. Для примера можно использовать автономную недорогую сенсорную систему для мониторинга состояния конструкций, а также программное обеспечение для анализа вибрационных характеристик. Реализованный чип трехосевого акселерометра основан на архитектуре микроэлектромеханической системы (MEMS) [27]. Данная система показана на рисунке 2.



Рисунок 2. Датчик ускорения USB с ноутбуком (слева) и датчик ускорения беспроводной локальной сети (справа) [27]

Figure 2. USB acceleration sensor with a laptop (left) and wireless LAN acceleration sensor (right) [27]

Из-за вибрационных характеристик мостов анализ измерений в вертикальном направлении дает наиболее значимые результаты, а также измерения в поперечном направлении могут учитываться для оценки собственных частот. Однако при измерениях в продольном направлении мостов не удалось получить значительных собственных частот. Согласно конструкции реализованного MEMS-акселерометра, шум измерения в направлении оси z примерно в десять раз выше, чем шум измерения в плоскости xy , поэтому ось z должна быть направлена параллельно продольной оси в направлении моста, тогда как оси x и y могут использоваться для выполнения измерений в поперечном и вертикальном направлениях [24]. Принцип данного способа показан на рисунке 3.

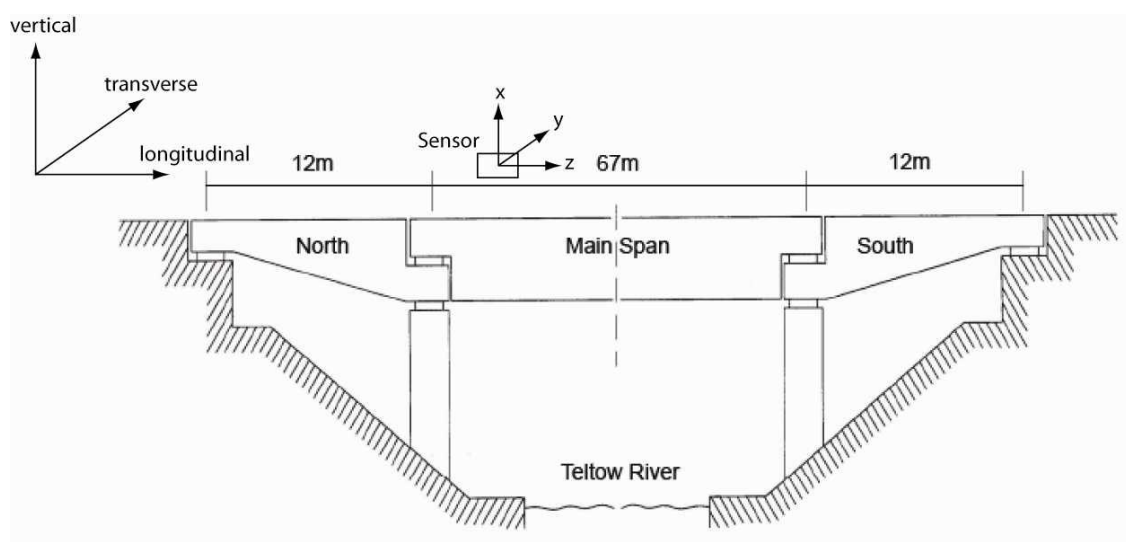


Рисунок 3. Изображение и схематическое изображение Комтурского моста в Берлине, Германия [27]

Figure 3. Image and schematic representation of the Komtur bridge in Berlin, Germany [27]

Таким образом, значения собственных частот представляют собой исходные данные, которые позволяют определить местоположение и объем трещины в балке. Задача данной статьи является оформлением алгоритм определения параметров повреждения исходя из экспериментальных значений собственных частоты.

Методы

Methods

Основное уравнение свободных колебаний неповрежденной балки

The fundamental equation of an undamaged beam's free oscillation

Рассмотрим упругую балку длиной l , находящуюся под действием поперечной силы $f(x, t)$ на единицу длины, $w(x, t)$ поперечное перемещение точек балки, $M(x, t)$ изгибающий момент и $V(x, t)$ сдвигающая сила.

На элемент балки действует сила инерции равна:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t).$$

Уравнение вертикальных колебаний балки можно представить в виде:

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t), \quad (1)$$

где ρ приведенная плотность и $A(x)$ площадь поперечного сечения балки. Исходя из рисунка 4 можно написать уравнение момента относительно оси u , проходящей через точку O :

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (2)$$

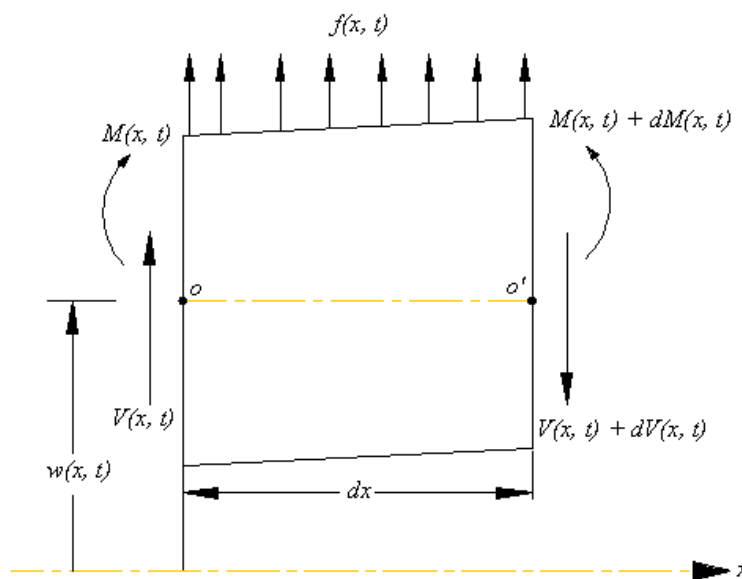


Рисунок 4. Диаграмма свободного тела балочного элемента при изгибе (разработано автором)

Figure 4. Free body diagram of a beam element in bending (developed by the author)

Приняв $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ и $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$ и, пренебрегая малыми величинами большего порядка малости, включая вторые степени в dx , можно представить уравнения (1) и (2) как:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0. \quad (4)$$

Используя соотношение $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ из уравнения (4), то уравнение (3) становится:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t). \quad (5)$$

Из теории изгиба балок типа Эйлера-Бернулли известно, что зависимость между изгибающим моментом и прогибом может быть выражена как:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t). \quad (6)$$

Здесь E — модуль Юнга, $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y . При подстановке соотношения (6) в уравнение (5), получаем уравнение движения вынужденных колебаний не стандартной балки:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t). \quad (7)$$

Для традиционной балки уравнение (7) сводится к:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (8)$$

Для свободных колебаний известно, что $f(x, t) = 0$, поэтому уравнение движения становится:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (9)$$

Метод расчета основной частоты пролетных конструкций при наличии трещины

Design method for the main frequency of span structures in the presence of a crack

Рассмотрим изгибные колебания традиционной балки Эйлера-Бернулли в плоскости x - u как показано на рисунке 5. Длина и высота балки соответственно, L и W . В балке есть трещина длиной a , расположенная на расстоянии b от левой опоры. Предполагается, что трещина всегда открыта, т. е. она расположена в растянутой зоне. Наличие

трещины создает разрыв при наклоне поперечных сечений балки, который пропорционален изгибающему моменту, передаваемому через участок с трещиной. Если $\theta(x)$ — наклон, то разрыв в наклоне приобретает вид:

$$\Delta\theta = C_m M. \quad (10)$$

Здесь M — изгибающий момент, передаваемый треснувшим участком и C_m — постоянная функция гибкости, представляющая в виде:

$$C_m = \frac{W}{EI} m\left(\frac{a}{W}\right). \quad (11)$$

Здесь E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения, $m\left(\frac{a}{W}\right)$ — функция зависит от коэффициента трещины a/W и геометрии сечения, эта функция определяется по формуле [28]:

$$m\left(\frac{a}{W}\right) = 2 \left(\frac{a/W}{1-a/W}\right)^2 [5.93 - 19.69 \left(\frac{a}{W}\right) + 37.14 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 35.84 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 13.12 \left(\frac{a}{W}\right)^4]. \quad (12)$$

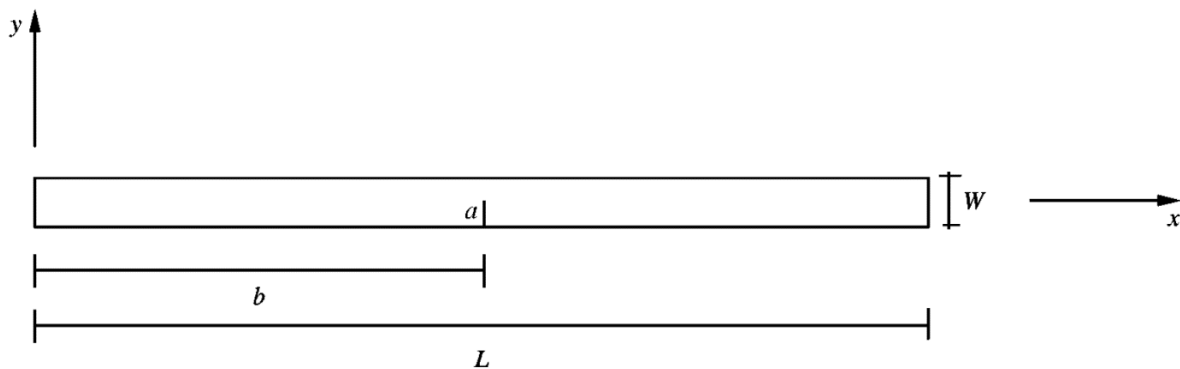


Рисунок 5. Модель балки с трещиной (разработано автором)

Figure 5. Beam model with a crack (developed by the author)

Предполагается, что вертикальное перемещение $y(x, t)$ участка, расположенного на расстоянии x от левого конца образца в момент времени t , равно:

$$y(x, t) = u(x) \cos \omega t. \quad (13)$$

где ω — частота гармонических колебаний, $u(x)$ — поперечный прогиб балки с трещинами.

Поперечный прогиб балки с трещиной $u(x)$ разделяется на две части, первой частью является поперечный прогиб неповрежденной балки $u_{nc}(x)$, и второй является полиномиальная функция x , которая представляет влияние трещины:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) \\ u_2(x) \end{cases}, \quad (14)$$

где: $u_1(x) = u_{nc}(x) + B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3, 0 \leq x \leq b,$

$u_2(x) = u_{nc}(x) + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3, b \leq x \leq L.$

Выражение (14) содержит восемь констант B_i и C_i ($i = 0, 1, 2, 3$), которые определяются с помощью следующих условий:

- четыре граничных условия, по два для каждого конца балки;
- три кинематические условия: равенство для поперечного прогиба, изгибающего момента и силы сдвига на участке с трещиной ($x = b$):

$$u_1(x) = u_2(x), \frac{d^2u_1(x)}{dx^2} = \frac{d^2u_2(x)}{dx^2}, \frac{d^3u_1(x)}{dx^3} = \frac{d^3u_2(x)}{dx^3}; \quad (15)$$

- одно условие для разрыва в наклоне на участке с трещиной ($x = b$):

$$\Delta\theta = \frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} = Wm \left(\frac{a}{W} \right) \frac{d^2u_2(x)}{dx^2}. \quad (16)$$

Максимальная потенциальная энергия балки равна:

$$U_{max} = \frac{EI}{2} \int_0^b \left(\frac{d^2u_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2u_2(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \Delta\theta M. \quad (17)$$

Изгибающий момент, который приходится на участок с трещиной, можно записать в виде:

$$M = EI d^2u_1(x) / dx^2 |_{x=b}. \quad (18)$$

Максимальная кинетическая энергия составляет:

$$T_{max} = \frac{\rho A \omega_1^2}{2} \int_0^b (u_1(x))^2 dx + \int_b^L (u_2(x))^2 dx, \quad (19)$$

где ρ массовая плотность и A площадь поперечного сечения балки. Наконец, можно получить основную частоту ω_1 из выражений (17) и (19).

Расчет основной частоты шарнирно опертой балки с трещиной

Calculation of the hinged beam fundamental frequency with a crack

Уравнение поперечного прогиба балки без трещин можно записать в виде:

$$u_{nc}(x) = D \sin(\pi x / L), \quad (20)$$

где D — произвольная константа с размерностью длины. Граничные условия будут:

$$\text{при } x = 0, u_1 = 0 \text{ и } \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0, \quad (21)$$

$$\text{при } x = L, u_2 = 0 \text{ и } \frac{d^2 u_2}{dx^2} = 0. \quad (22)$$

При применении этих граничных условий, выражения для поперечного прогиба балки с трещиной можно записать в виде:

$$u_1(x) = D \left[\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{bW}{L^3} \left(1 - \frac{L}{b} \right) m \left(\frac{a}{W} \right) \pi^2 \sin \frac{\pi b}{L} \right], 0 \leq x \leq b, \quad (23)$$

$$u_2(x) = D \left[\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{bW}{L^2} m \left(\frac{a}{W} \right) \pi^2 \sin \frac{\pi b}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right], b \leq x \leq L. \quad (24)$$

Изгибающий момент, передаваемый треснувшим участком, можно записать в виде:

$$M = -DEI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi b}{L}. \quad (25)$$

И разрыв в наклоне поперечного сечения на участке с трещиной равен:

$$\Delta\theta = -DWm \left(\frac{a}{W} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi b}{L}. \quad (26)$$

При вставке значений $u_1(x)$, $u_2(x)$, M и $\Delta\theta$ в уравнениях (17) и (19) можно получить:

$$U_{max} = D^2 (EI\pi^4 / 4 L^3) (1 + \eta\gamma), \quad (27)$$

$$T_{max} = \omega_1^2 D^2 \frac{\rho AL}{4} \left(1 + 2\eta\gamma + \frac{\pi^4}{3} \eta^2 \left[\left(\frac{b}{L} \right)^4 \gamma - 2 \left(\frac{b}{L} \right)^3 \gamma + \left(\frac{b}{L} \right)^2 \gamma \right] \right). \quad (28)$$

где $\eta = \left(\frac{W}{L} \right) m \left(\frac{a}{W} \right)$ и $\gamma = 1 - \cos (2\pi b/L)$.

Из уравнений (27) и (28) получаем выражение для основной частоты балки с трещиной:

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\frac{1 + \eta\gamma}{1 + 2\eta\gamma + \left(\frac{\pi^4}{3} \right) \eta^2 \left[\left(\frac{b}{L} \right)^4 \gamma - 2 \left(\frac{b}{L} \right)^3 \gamma + \left(\frac{b}{L} \right)^2 \gamma \right]} \right]^{1/2}. \quad (29)$$

Здесь ω_0 — основная частота балки без трещин.

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{EI/\rho A}.$$

Обратная задача

Inverse problem

Алгоритм расчета, адаптированный для задач мониторинга и диагностики, можно записать:

1. Составляется выражение расчета частоты балки с трещиной для формы собственных колебаний с индексом "n":

$$\omega_{cn} = \omega_n \left[\frac{1 + \eta\gamma}{1 + 2\eta\gamma + \left(\frac{n\pi}{3}\right)^4 \eta^2 \left[\left(\frac{b}{L}\right)^4 \gamma - 2\left(\frac{b}{L}\right)^3 \gamma + \left(\frac{b}{L}\right)^2 \gamma \right]} \right]^{1/2}, \quad (30)$$

где $\gamma = 1 - \cos(2n\pi b/L)$, $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{EI/\rho A}$.

2. Подставить две измеренные частоты ω_{c1} , ω_{c2} в выражении (30) и рассчитать ω_1 и ω_2 и, в свою очередь, их также подставить их в выражении (30).

3. Решить два нелинейные уравнения относительно двух неизвестных $x_1 = \eta$ и $x_2 = b/L$ ($n = 1, 2$) в MATLAB через функцию «fsolve».

4. Найти соотношение $\frac{a}{W}$ через выражение:

$$\eta = \left(\frac{W}{L}\right) * 2 \left(\frac{\frac{a}{W}}{1 - \frac{a}{W}}\right)^2 \left[5.93 - 19.69 \left(\frac{a}{W}\right) + 37.14 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 35.84 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 13.12 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right], \quad (31)$$

здесь необходимо решить нелинейное уравнение с неизвестным $x = \frac{a}{W}$ в MATLAB через функцию «vpasolve».

5. Найти местоположение трещины $b = x_2 \cdot L$ и высоту трещины $a = x \cdot W$.

Для численных исследований рассмотрим шарнирно опертую главную балку мостового перехода длиной $L = 30$ м и прямоугольным сечением $(0,5 \times 1)$ м, модуль упругости $E = 2,1 \times 10^{11}$ Па, массовая плотность $\rho = 7860$ кг / м³.

Результат исследования

Research result

В таблице 1 приведены значения собственных частот главной балки мостового перехода с трещиной для разных значений месторасположения (b/L) и длины (a/W) трещины в балке.

Таблица 1 / Table 1

Значения собственных частот балки моста с трещиной (рад/с)
 Natural frequencies of a bridge beam with a crack (rad/s)

a/W	b/L								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631	16.3631
0.1	16.3576	16.3431	16.3253	16.3110	16.3055	16.3110	16.3253	16.3431	16.3576
0.2	16.3422	16.2878	16.2214	16.1684	16.1483	16.1684	16.2214	16.2878	16.3422
0.3	16.3153	16.1917	16.0431	15.9265	15.8829	15.9265	16.0431	16.1917	16.3153
0.4	16.2691	16.0293	15.7482	15.5337	15.4548	15.5337	15.7482	16.0293	16.2691
0.5	16.1864	15.7458	15.2517	14.8914	14.7624	14.8914	15.2517	15.7458	16.1864
0.6	16.0297	15.2337	14.4087	13.8495	13.6572	13.8495	14.4087	15.2337	16.0297
0.7	15.7034	14.2650	12.9731	12.1915	11.9373	12.1915	12.9731	14.2650	15.7034
0.8	14.8741	12.2762	10.4974	9.5824	9.3041	9.5824	10.4974	12.2762	14.8741
0.9	11.7764	7.8733	6.2301	5.5230	5.3205	5.5230	6.2301	7.8733	11.7764

Исходя из результатов таблицы 1, можно построить соотношение между длиной трещины (a/W) и относительной основной частотой балки с трещиной для разных значений месторасположения (b/L) (рис. 6) и представить графически соотношение между месторасположением (b/L) и относительной основной частотой колебаний балки с трещиной для разных значений длины трещины (a/W) (рис 7).

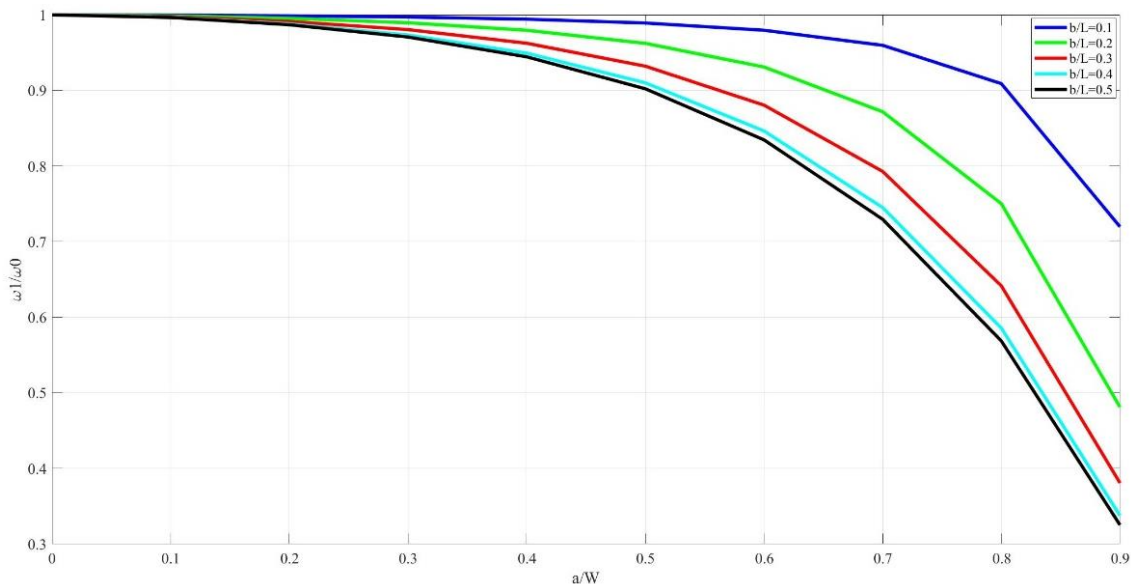


Рисунок 6. Соотношение между длиной трещины (a/W) и относительной основной частотой балки с трещиной для разных значений месторасположения (b/L) (разработано автором)

Figure 6. Relationship between crack length (a/W) and relative fundamental frequency of cracked beam for different location values (b/L) (developed by the author)

Согласно предлагаемой методике вычислено прогнозируемое месторасположение и длина трещины при решении обратной задачи (30) для пар значений $(b/L, a/W) = (0.1, 0.1), (0.2, 0.2), (0.3, 0.3), (0.4, 0.4)$,

(0.5, 0.5), в зависимости от значений собственных частот из разной литературы (табл. 2).

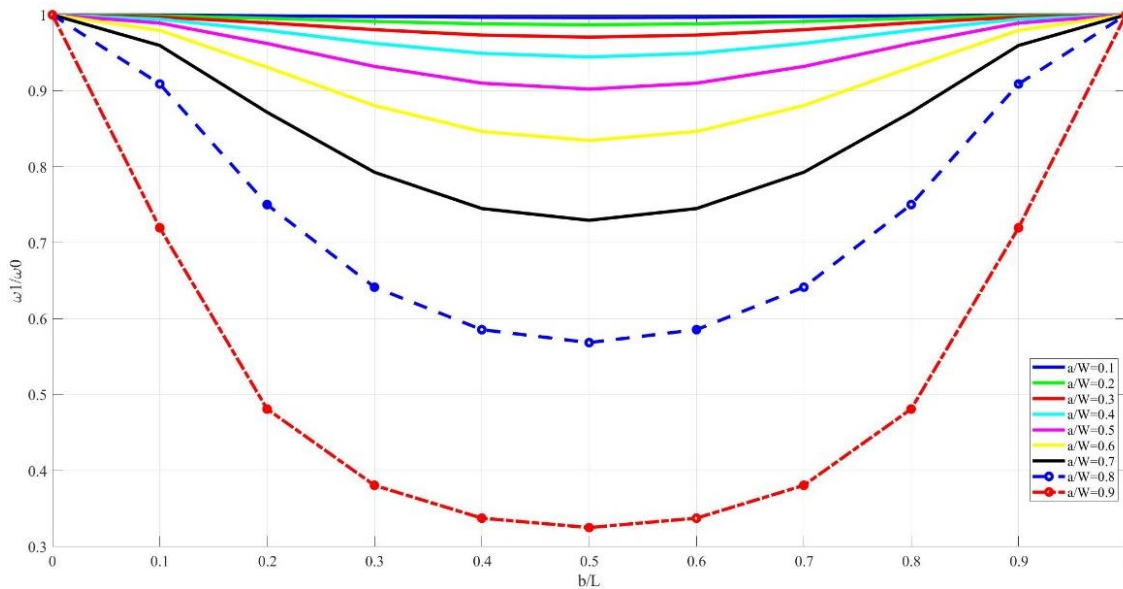


Рисунок 7. Соотношение между месторасположением трещины (b/L) и относительной основной частотой балки с трещиной для разных значений длины трещины (a/W) (разработано автором)

Figure 7. Relationship between crack location (b/L) and relative fundamental frequency of cracked beam for different crack lengths (a/W) (developed by the author)

Таблица 2 / Table 2

Предсказанные месторасположение и длину трещины по обратной задаче согласно выражению (30)

Predicted location and length of the crack according to the inverse problem according to expression (30)

b/L настоящая трещина Real crack	b/L предсказанная трещина Predicted crack	Ошибка Error (%)	a/W настоящая трещина Real crack	a/W предсказанная трещина Predicted crack	Ошибка Error (%)
0.1	0.0979	2.1	0.1	0.102	2
0.2	0.2001	0.05	0.2	0.2001	0.05
0.3	0.3000	0	0.3	0.3001	0.0333
0.4	0.4000	0	0.4	0.3999	0.025
0.5	0.5001	0.02	0.5	0.5000	0

Обсуждение

Discussion

Получаемый результат показывает влияние месторасположения (b/L) и относительной длины (a/W) трещины на значения частоты собственных колебаний главной балки мостового пролета. Замечено, что с увеличением относительной длины трещины собственная частота уменьшается. Анализируя рисунок 6 можно отметить, что серьезное

уменьшение частоты собственных колебаний начинается с значения относительной длины трещины $a/W = 0,3$. И также можно отметить, что собственная частота уменьшается вдвое при значении относительной длины трещины $a/W = 0,8$. Анализируя рисунок 7 можно отметить, что с увеличением относительного месторасположения трещины (b/L) в диапазоне $0 \leq \frac{b}{L} \leq \frac{1}{2}$ с обеих сторон балки моста собственная частота уменьшается. Серьезное уменьшение частоты собственных колебаний начинается со значения относительного месторасположения трещины равного $b/L = 0,1$.

Данная работа предлагает метод определения параметров открытой трещины в растянутой зоне шарнирно опертой балки пролетных конструкций используя две измеренные частоты и недорогую автоматизированную систему для мониторинга состояния конструкций. Таблица 2 показывает эффективность использования этого метода для определения местоположения и длины трещины, так что ошибки точности расчета данного метода почти не превышали 2%. В целом можно отметить, что проведенное исследование позволило хорошо понять влияние месторасположения и длины трещины на значения частоты собственных колебаний главной балки пролетной конструкции. По результатам исследования приходили к выводу что, трещины в растянутой зоне шарнирной балки с параметрами ($\frac{b}{L} \leq 0,1; \frac{a}{W} \leq 0,1$) не существенно влияют на текущую работу пролетного строения. С другой стороны, необходимо проводить исследование для оценки состояния поврежденной балки моста с параметрами трещины ($\frac{b}{L} \geq 0,1; \frac{a}{W} \leq 0,3$) и далее рекомендовать подходящее решение из имеющихся технологических процессов в зависимости от ситуации. Для пролетных конструкций, балки которых имеют параметры трещины ($\frac{b}{L} \geq 0,1; \frac{a}{W} \geq 0,3$) требуется детальное инженерное обследование, после которого, скорее всего, ремонтных мероприятий не удастся избежать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтев, А.А. Сейсмическое поведение главной балки моста с вязкоупругими демпферами / А.А. Локтев, А. Баракат, Д. Кбейли. — DOI <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.7.809-818> // Вестник МГСУ. — 2021. — Т 16. — № 7. — С. 809–818. — URL: <http://vestnikmgsu.ru/en/component/sjarchive/issue/article.display/2021/7/809-818> (дата обращения: 21.04.2022).
2. Локтев, А.А. Вязкоупругие узлы опирания на опору железнодорожного мостового перехода / А.А. Локтев, В.В. Королев, Н.А. Клековкина, А. Баракат // Современные проблемы совершенствования работы железнодорожного транспорта: Межвузовский сборник научных трудов / Москва: ФГАОУ ВО "Российский университет транспорта", 2021. — С. 259–265. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46476832> (дата обращения: 21.04.2022).

3. **Локтев, А.А.** Особенности оценки состояния и поведения низководных мостов / А.А. Локтев, В.В. Королев, И.В. Шишкина. — DOI <https://doi.org/10.21780/2223-9731-2021-80-6-334-342> // Вестник ВНИИЖТ. — 2021. — Т 80. — № 6. — С. 334–342. — URL: <https://www.journal-vniizht.ru/jour/article/view/545> (дата обращения: 21.04.2022).
4. **Chunyu, F.** Stiffness Estimation of Cracked Beams Based on Nonlinear Stress Distributions Near the Crack / F. Chunyu, W. Yuyang, T. Dawei. — DOI <https://doi.org/10.1155/2018/5987973> // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — Т 2018. — С. 5987973. — URL: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2018/5987973/> (дата обращения: 21.04.2022).
5. **Batihah, A.Ç.** Vibration Analysis of a Cracked Beam on an Elastic Foundation / A.Ç. Batihan, F.S. Kadioğlu. — DOI <https://doi.org/10.1142/S0219455415500066> // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2016. — Т 16. — № 5. — С. 15500066. — URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219455415500066> (дата обращения: 21.04.2022).
6. **Mazaheri, H.** Static and Dynamic Analysis of Cracked Concrete Beams Using Experimental Study and Finite Element Analysis / H. Mazaheri, H. Rahami, A. Kheyroddin. — DOI <https://doi.org/10.3311/PPci.11450> // Periodica Polytechnica Civil Engineering. — 2018. — Т 62. — № 2. — С. 337–345. — URL: <https://pp.bme.hu/ci/article/view/11450> (дата обращения: 21.04.2022).
7. **Nevesa, A.C.** Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models / A.C. Nevesa, F.M.F. Simõesb, A. Pinto da Costab. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.02.007> // Computers & Structures. — 2016. — Т 168. — С. 68–77. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S004579491630030X> (дата обращения: 21.04.2022).
8. **Vigneshwaran, K.** Vibration Analysis of a Simply Supported Beam with Multiple Breathing Cracks / K. Vigneshwaran, R.K. Behera. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.104> // Procedia Engineering. — 2014. — Т 86. — С. 835–842. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705814020633> (дата обращения: 21.04.2022).
9. **Chettah, M.** Free vibration analysis of a cracked elastically supported beam / M. Chettah, R. Lassoued. — DOI <https://doi.org/10.1504/IJNVN.2019.102150> // International Journal of Vehicle Noise and Vibration. — 2019. — Т 15. — № 1. — С. 1–20. — URL: <https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJNVN.2019.102150> (дата обращения: 21.04.2022).
10. **Khalkar, V.** Comparative vibration study of EN 8 and EN 47 cracked cantilever beam / V. Khalkar, S. Ramachandran. — DOI <https://doi.org/10.21595/jve.2016.17394> // Journal of Vibroengineering. — 2017. — Т 19. — № 1. — С. 246–259. — URL: <https://www.extrica.com/article/17394> (дата обращения: 21.04.2022).
11. **Ghannadiasl, A.** Dynamic analysis of multiple cracked Timoshenko beam under moving load—analytical method / A. Ghannadiasl, A.S. Khodapanah. — DOI <https://doi.org/10.1177/1077546320977596> // Journal of Vibration and Control. — 2020. — Т 28. — № 3–4. — С. 379–395. — URL: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1077546320977596> (дата обращения: 21.04.2022).
12. **Sarvestan, V.** Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method / V. Sarvestan, H.R. Mirdamadi, M. Ghayour. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2017.01.035> // International Journal of Mechanical Sciences. — 2017. — Т 122. — С. 318–330. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020740317301571> (дата обращения: 21.04.2022).
13. **Attar, M.** Dynamic response of cracked Timoshenko beams on elastic foundations under moving harmonic loads / M. Attar, A. Karrech, K. Regenauer-Lieb. — DOI <https://doi.org/10.1177/1077546315580470> // Journal of Vibration and Control. — 2015. — Т 23. — № 3. — С. 432–457. — URL: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1077546315580470> (дата обращения: 03.05.2022).
14. **Ozturk, H.** Dynamic Analysis of Elastically Supported Cracked Beam Subjected to a Concentrated Moving Load / H. Ozturk, Z. Kiral, B.G. Kiral. — DOI <https://doi.org/10.1590/1679-78252195> // Latin American Journal of Solids and Structures. — 2016. — Т 13. — № 1. — С. 175–200. — URL: <https://www.scielo.br/j/lajss/a/YjNzkjbcJbnftJqXKhcncvGR/?lang=en> (дата обращения: 03.05.2022).

15. **Zhao, X.** Analytical solutions for the coupled thermoelastic vibrations of the cracked Euler-Bernoulli beams by means of Green's functions / X. Zhao, Q.J. Hu, W. Crossley, C.C. Du, Y.H. Li. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.009> // International Journal of Mechanical Sciences. — 2017. — Т 128–129. — С. 37–53. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020740316305239> (дата обращения: 03.05.2022).
16. **Jena, S.P.** Dynamic response and analysis of cracked beam subjected to transit mass / S.P. Jena, D.R. Parhi. — DOI <https://doi.org/10.1007/s40435-017-0361-3> // International Journal of Dynamics and Control. — 2018. — Т 6. — № 3. — С. 961–972. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40435-017-0361-3> (дата обращения: 03.05.2022).
17. **Zhou, L.** Response of cracked simply supported concrete beam with moving vehicle load / L. Zhou, H. Liu. — DOI <https://doi.org/10.1002/suco.201500138> // Structural Concrete. — 2016. — Т 15. — № 5. — С. 875–882. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/suco.201500138> (дата обращения: 03.05.2022).
18. **Nguyen, K.V.** Comparison studies of open and breathing crack detections of a beam-like bridge subjected to a moving vehicle / K.V. Nguyen. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.01.018> // Engineering Structures. — 2013. — Т 51. — С. 306–314. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0141029613000333> (дата обращения: 03.05.2022).
19. **Fu, C.** Dynamic behavior of a simply supported bridge with a switching crack subjected to seismic excitations and moving trains / C. Fu. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.055> // Engineering Structures. — 2016. — Т 110. — С. 59–69. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0141029615007622> (дата обращения: 03.05.2022).
20. **Chettah, M.** Comparative study of direct and inverse problems of cracked beams / M. Chettah, R. Lassoued. — DOI <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814902015> // 2nd International Congress on Materials & Structural Stability (CMSS-2017), Rabat, Morocco, November 22–25, 2017 / Под ред. A. Diouri, A. Boukhari, L. Ait Brahim, L. Bahi, N. Khachani, M. Saadi, J. Aride, A. Nounah Рабат: MATEC Web of Conferences, 2018. — С. 02015. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2018/08/mateconf_cmss2018_02015/mateconf_cmss2018_02015.html (дата обращения: 03.05.2022).
21. **Tan, G.** Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions / G. Tan, J. Shan, C. Wu, W. Wang. — DOI <https://doi.org/10.1177/1687814017737261> // Advances in Mechanical Engineering. — 2017. — Т 9. — № 11. — URL: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1687814017737261> (дата обращения: 03.05.2022).
22. **Mousavi, M.** A Spline Method based on the Crack Induced Deflection for Bridge Damage Detection / M. Mousavi, D. Holloway, J.C. Olivier, A.H. Gandomi. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102894> // Advances in Engineering Software. — 2020. — Т 149. — С. 102894. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0965997820300272> (дата обращения: 03.05.2022).
23. **Wang, X.** Damage Detection of Bridges under Environmental Temperature Changes Using a Hybrid Method / X. Wang, Q. Gao, Y. Liu. — DOI <https://doi.org/10.3390/s20143999> // Sensors. — 2020. — Т 20. — № 14. — С. 3999. — URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/14/3999> (дата обращения: 14.05.2022).
24. **Gillich, G.R.** Damage Detection on a Beam with Multiple Cracks: A Simplified Method Based on Relative Frequency Shifts / G.R. Gillich, N.M.M. Maia, M.A. Wahab, C. Tufisi, Z.I. Korka, N. Gillich [и др.]. — DOI <https://doi.org/10.3390/s21155215> // Sensors. — 2021. — Т 21. — № 15. — С. 5215. — URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/15/5215> (дата обращения: 14.05.2022).
25. **Gordan, M.** Data mining-based damage identification of a slab-on-girder bridge using inverse analysis / M. Gordan, Z. Ismail, H. Abdul Razak, K. Ghaedi, Z. Ibrahim, Z. X. Tan [и др.]. — DOI <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107175> // Measurement. — 2020. — Т 151. — С. 107175. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0263224119310413> (дата обращения: 14.05.2022).

26. **Mekjavić, I.** Damage Assessment in Bridges Based on Measured Natural Frequencies / I. Mekjavić, D. Damjanović. — DOI <https://doi.org/10.1142/S0219455417500225> // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2017. — Т 17. — № 02. — С. 17500225. — URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219455417500225> (дата обращения: 14.05.2022).
27. **Neitzel, F.** Vibration monitoring of bridges / F. Neitzel, B. Resnik, S. Weisbrich, A. Friedrich // Reports on Geodesy. — 2011. — Т z. 1/90. — С. 331–340. — URL: https://www.researchgate.net/publication/267225017_Vibration_monitoring_of_bridges (дата обращения: 14.05.2022).
28. **Fernández-sáez, J.** Approximate Calculation of The Fundamental Frequency for Bending Vibrations of Cracked Beams / J. Fernández-sáez, L. Rubio, C. Navarro. — DOI <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2251> // Journal of Sound and Vibration. — 1999. — Т 226. — № 2. — С. 345–352. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022460X99922514> (дата обращения: 14.05.2022).

Сведения об авторах:

Локтев Алексей Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Строительной и теоретической механики», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия, заведующий кафедрой «Транспортного строительства», ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)», Москва, Россия, e-mail: aaloktev@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8375-9914>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=16528

Баракат Ахмад — аспирант кафедры «Строительной и теоретической механики», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия, e-mail: ahmadbarakat9992@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1239-824X>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1103455

Статья получена: 17.07.2022. Принята к публикации: 23.09.2022. Опубликована онлайн: 08.10.2022.

REFERENCES

1. Loktev A.A., Barakat A., Qbaily J. Seismic behavior of the main girder of a bridge with viscoelastic dampers. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2021; 16(7): 809–818. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.7.809-818>.
2. Loktev A.A., Korolev V.V., Klekovkina N.A., Barakat A. [Viscoelastic support units on the support of the railway bridge crossing]. In: *[Modern problems of improving the work of railway transport: Interuniversity collection of scientific papers]*. Moscow: Russian University of Transport; 2021. p. 259–265. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46476832> (accessed 21st April 2022). (In Russ.).
3. Loktev A.A., Korolev V.V., Shishkina I.V. Features of assessing the condition and behavior of low-water bridges. *Russian Railway Science Journal*. 2021; 80(6): 334–342. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.21780/2223-9731-2021-80-6-334-342>.
4. Chunyu F., Yuyang W., Dawei T. Stiffness Estimation of Cracked Beams Based on Nonlinear Stress Distributions Near the Crack. *Mathematical Problems in Engineering*. 2018; 2018: 5987973. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/5987973>.
5. Batihan A.Ç., Kadioğlu F.S. Vibration Analysis of a Cracked Beam on an Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016; 16(5): 15500066. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455415500066>.
6. Mazaheri H., Rahami H., Kheyroddin A. Static and Dynamic Analysis of Cracked Concrete Beams Using Experimental Study and Finite Element Analysis. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2018; 62(2): 337–345. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3311/PPci.11450>.

7. Nevesa A.C., Simõesb F.M.F., Pinto da Costab A. Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models. *Computers & Structures*. 2016; 168: 68–77. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.02.007>.
8. Vigneshwaran K., Behera R.K. Vibration Analysis of a Simply Supported Beam with Multiple Breathing Cracks. *Procedia Engineering*. 2014; 86: 835–842. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.104>.
9. Chettah M., Lassoued R. Free vibration analysis of a cracked elastically supported beam. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*. 2019; 15(1): 1–20. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1504/IJNV.2019.102150>.
10. Khalkar V., Ramachandran S. Comparative vibration study of EN 8 and EN 47 cracked cantilever beam. *Journal of Vibroengineering*. 2017; 19(1): 246–259. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.21595/jve.2016.17394>.
11. Ghannadiasl A., Khodapanah A.S. Dynamic analysis of multiple cracked Timoshenko beam under moving load-analytical method. *Journal of Vibration and Control*. 2020; 28(3–4): 379–395. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320977596>.
12. Sarvestan V., Mirdamadi H.R., Ghayour M. Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017; 122: 318–330. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.035>.
13. Attar M., Karrech A., Regenauer-Lieb K. Dynamic response of cracked Timoshenko beams on elastic foundations under moving harmonic loads. *Journal of Vibration and Control*. 2015; 23(3): 432–457. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546315580470>.
14. Ozturk H., Kiral Z., Kiral B.G. Dynamic Analysis of Elastically Supported Cracked Beam Subjected to a Concentrated Moving Load. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2016; 13(1): 175–200. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1590/1679-78252195>.
15. Zhao X., Hu Q.J., Crossley W., Du C.C., Li Y.H. Analytical solutions for the coupled thermoelastic vibrations of the cracked Euler-Bernoulli beams by means of Green's functions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017; 128–129: 37–53. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.009>.
16. Jena S.P., Parhi D.R. Dynamic response and analysis of cracked beam subjected to transit mass. *International Journal of Dynamics and Control*. 2018; 6(3): 961–972. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s40435-017-0361-3>.
17. Zhou L., Liu H. Response of cracked simply supported concrete beam with moving vehicle load. *Structural Concrete*. 2016; 15(5): 875–882. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1002/suco.201500138>.
18. Nguyen K.V. Comparison studies of open and breathing crack detections of a beam-like bridge subjected to a moving vehicle. *Engineering Structures*. 2013; 51: 306–314. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.01.018>.
19. Fu C. Dynamic behavior of a simply supported bridge with a switching crack subjected to seismic excitations and moving trains. *Engineering Structures*. 2016; 110: 59–69. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.055>.
20. Chettah M., Lassoued R. Comparative study of direct and inverse problems of cracked beams. In: A. Diouri, A. Boukhari, L. Ait Brahim, L. Bahi, N. Khachani, M. Saadi, J. Aride and A. Nounah (Eds.). *2nd International Congress on Materials & Structural Stability (CMSS-2017), Rabat, Morocco, November 22–25, 2017*. Rabat: MATEC Web of Conferences; 2018. p. 02015. Available at: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2018/08/mateconf_emss2018_02015/mateconf_emss2018_02015.html (accessed 3rd May 2022). (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814902015>.
21. Tan G., Shan J., Wu C., Wang W. Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions. *Advances in Mechanical Engineering*. 2017; 9(11): (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1177/1687814017737261>.
22. Mousavi M., Holloway D., Olivier J.C., Gandomi A.H. A Spline Method based on the Crack Induced Deflection for Bridge Damage Detection. *Advances in Engineering Software*. 2020; 149: 102894. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102894>.

23. Wang X., Gao Q., Liu Y. Damage Detection of Bridges under Environmental Temperature Changes Using a Hybrid Method. *Sensors*. 2020; 20(14): 3999. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3390/s20143999>.
24. Gillich G.R., Maia N.M.M., Wahab M.A., Tufisi C., Korca Z.I., Gillich N. et al. Damage Detection on a Beam with Multiple Cracks: A Simplified Method Based on Relative Frequency Shifts. *Sensors*. 2021; 21(15): 5215. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3390/s21155215>.
25. Gordan M., Ismail Z., Abdul Razak H., Ghaedi K., Ibrahim Z., Tan Z.X. et al. Data mining-based damage identification of a slab-on-girder bridge using inverse analysis. *Measurement*. 2020; 151: 107175. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107175>.
26. Mekjavić I., Damjanović D. Damage Assessment in Bridges Based on Measured Natural Frequencies. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017; 17(02): 17500225. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417500225>.
27. Neitzel F., Resnik B., Weisbrich S., Friedrich A. Vibration monitoring of bridges. *Reports on Geodesy*. 2011; z. 1/90: 331–340. Available at: https://www.researchgate.net/publication/267225017_Vibration_monitoring_of_bridges (accessed 14 May 2022). (In Eng.).
28. Fernández-sáez J., Rubio L., Navarro C. Approximate Calculation of The Fundamental Frequency for Bending Vibrations of Cracked Beams. *Journal of Sound and Vibration*. 1999; 226(2): 345–352. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2251>.

Information about the authors:

Aleksey A. Loktev — Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, e-mail: aaloktev@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8375-9914>
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=16528

Ahmad Barakat — Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia, e-mail: ahmadbarakat9992@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1239-824X>
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1103455

Submitted: 17th July 2022. Revised: 23rd September 2022. Published online: 8th October 2022.